Didáctica

La utilización de los acertijos lógicos de Smullyan como fuente de problemas de lógica proposicional

Juan José García Norro

No cabe duda de que, cuando el maltrecho profesor de filosofía de bachillerato arriba a las lecciones que el programa oficial dedica a la lógica, encuentra dificultades didácticas distintas de las que ha arrostrado o arrostrará en otros temas. Una de ellas —y, ciertamente, no de las menores— es el ya consabido latiguillo, que inexorablemente oirá de boca de sus alumnos: «Y esto, ¿para qué sirve?» La pregunta no es novedosa. Incluso los jóvenes, cuando se les propone un saber, no pueden sacudirse el yugo mercantilista con que nuestra sociedad (y quizá todas las sociedades) nos agobia e inquieren por su utilidad. Protágoras lo sabía y, como buscaba el éxito, se vanagloriaba de enseñar una filosofía para la vida, un saber para manejarse en las tareas cotidianas.[1]

En este brete, el profesor puede arriesgarse a iniciar un valiente exordio en favor de las cosas inútiles, que, como es sabido, son las únicas que valen por sí mismas y cuya existencia hace que la vida sea algo que merezca la pena ser vivida. Si, fatigado de anteriores esfuerzos oratorios, se encuentra extenuado, cabe también acallar la pregunta, que es más bien una queja, señalando diversos fines posibles y lejanos para el estudio de la lógica. Puede poner de relieve cómo la lógica ha desempeñado un notable papel en la fundamentación de la matemática. Puede asimismo, hablar de la capacidad formativa que tienen los ejercicios lógicos o bien de cómo de este modo se ofrece al alumno la ocasión de que capte lo que es un lenguaje formal, que tan importante papel

[1] PLATON, *Protágoras,* 318 e.

desempeña en las ciencias. Igualmente puede mentar la palabra talismán "informática" y contar sin demasiada convicción que esto que se ve en clase es el substrato imprescindible para construir la maquinaria de los ordenadores.

Junto a estas respuestas, queda otro camino, que resulta fructífero a veces. Si fuera posible engatusar a los alumnos con algún tipo de problema que les atraiga por sí mismo y que les parezca difícil y atractivo de resolver, podrían entonces contemplar los conocimientos lógicos con interés, ya que serían la solución a un problema que les inquieta. Hay muchos problemas con estas características y no es difícil pergeñar unos cuantos. Cada día abundan más los libros que los recogen y existen incluso revistas especializadas en su difusión. Especialmente interesantes para nuestros fines son los que propone Smullyan en sus conocidos libros de acertijos lógicos. Varias de sus obras se encuentran traducidas al castellano[2]. Los problemas allí propuestos admiten una solución que el ingenio natural de los estudiantes (al menos el de algunos) puede alcanzar. No es difícil simplificar la búsqueda de la solución con el empleo de determinadas técnicas lógicas. Todos ellos admiten ser resueltos por diversos procedimientos: tablas de verdad, árboles lógicos, reglas de deducción natural, diagramas de Venn, etc. Veamos algunos ejemplos de estos problemas y de algún procedimiento para resolverlos. ¡Ah, por cierto! No tengo más remedio que poner en guardia al profesor que adopte esta estrategia de un peligro aletargado en ella: que algún alumno pregunte para qué sirve resolver esos problemas.

* * *

En el tercer capítulo del libro de Smullyan, *Alicia en el País de las Maravillas,* su protagonista mantiene una instructiva conversación con la Duquesa.

«El gato de Cheshire dice que aquí todos están locos —dijo Alicia—. ¿Es verdad eso?

—Claro que no —respondió la Duquesa—. Si eso fuera verdad, también el Gato estaría loco y por consiguiente no podrías fiarte de lo que dice.

Esto a Alicia le sonó perfectamente lógico.

—Pero te diré un gran secreto, querida —continuó la Duquesa—. La *mitad* de los que andan por aquí están locos, ¡completamente locos!

—Eso no me sorprende —dijo Alicia—, muchos me han parecido *bastante* locos.

—Al decir *completamente locos* —continuó la Duquesa, haciendo caso omiso del comentario de Alicia—, quise decir exactamente lo que dije: ¡Están

[2] Posiblemente las tres más interesantes para nuestros fines sean las publicadas por Cátedra: *¿Cómo se llama este libro?* (Madrid, 1983), *La dama y el tigre* (Madrid, 1984) y *Alicia en el País de las Maravillas* (Madrid, 1986).

completamente engañados! Todas sus creencias están equivocadas, no sólo algunas, sino *todas*. Creen que todo lo verdadero es falso y que todo lo falso es verdadero.

Alicia consideró un momento este peculiar estado de cosas.

—¿Cree un loco que dos y dos son cinco? —preguntó Alicia.

—¡Pues claro, niña! Como dos y dos no son cinco un loco cree que sí.

—¿Y cree también un loco que dos y dos son seis?

—Por supuesto —contestó la Duquesa—, al no ser seis un loco cree que sí.

—¡Pero no pueden a la vez ser cinco y seis! —exclamó Alicia.

—Claro que no —dijo la Duquesa— *tú y yo* sabemos eso, pero un loco, no. Y la moraleja de esto es...

—¿Y los cuerdos de por aquí? —interrumpió Alicia (que había oído suficientes moralejas ese día)—. Me imagino que la mayoría de sus creencias son verdaderas, pero algunas no lo serán.

—Oh, no, no —dijo la Duquesa con énfasis—. Eso será verdad en *tu* tierra, pero aquí los cuerdos son cien por cien exactos en sus creencias. Creen que todo lo verdadero es verdadero y que todo lo falso es falso.

Alicia consideró esto.

—¿Quiénes están locos aquí y quiénes están cuerdos? —preguntó Alicia—. Me gustaría mucho saberlo.

—Veamos —contestó la Duquesa—, fíjate, por ejemplo, en la Oruga y en Bill el Lagarto. La Oruga cree que los dos están locos.

—¿Cuál de ellos está realmente loco? —preguntó Alicia.

—No debería tener que decirte *eso* —respondió la Duquesa—. Te he dado suficiente información para que deduzcas la respuesta.

¿Cuál es la solución? ¿Está la Oruga loca o cuerda? ¿Y el Lagarto?»[3].

* * *

No le costó mucho a Alicia descubrir el grado de cordura de la Oruga y del Lagarto. A nosotros tampoco nos debería resultar laborioso averiguarlo, incluso aunque no tengamos la perspicacia de Alicia, si echamos mano de algunas técnicas lógicas sencillas.

Por ejemplo, utilicemos las reglas del método de deducción natural. Ante todo, hemos de formalizar la cuestión que se nos plantea. Llamemos p a la proposición «la Oruga está cuerda» y q a la proposición que afirma que el Lagarto está cuerdo. Evidentemente las proposiciones «la Oruga está loca» y «el Lagarto está loco» quedarán simbolizados por $\neg p$ y $\neg q$ respectivamente, ya que en el maravilloso país visitado por Alicia entre la cordura y la locura no existe un estado intermedio. Por consiguiente, la afirmación de la Oruga puede ser simbolizada de este modo: $\neg p \land \neg q$.

Sabemos que si la Oruga está cuerda lo que la Oruga cree y afirma es verdad

[3] *Alicia en el País de las Maravillas*, pp. 37 y ss., en la edición citada.

y por otra parte si lo que afirma la Oruga es verdad, entonces la Oruga está cuerda. Esta información puede ser formalizada así:

1. $p \rightarrow \neg p \wedge \neg q$
2. $\neg p \wedge \neg q \rightarrow p$

O lo que es igual:

1'. $p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

La tarea que ahora nos aguarda es, a partir de las premisas 1.y 2. (o si lo preferimos a partir del 1'.) deducir o bien p o bien $\neg$ p y q o bien $\neg$ q.

Intentemos en primer lugar probar p. Utilicemos el procedimiento indirecto o de reducción al absurdo. Empecemos suponiendo que es verdad la negación de lo que queremos probar y busquemos una contradicción.

—1.	$p \rightarrow \neg p \wedge \neg q$	
—2.	$\neg p \wedge \neg q \rightarrow p$	
3	$\neg p$	
4.	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	MT 2,3
5.	$p \vee q$	DM 4
6.	q	SD 3,5

En seguida nos damos cuenta de que no vamos a poder concluir ninguna fórmula contradictoria. Esto significa que p no puede ser deducido de las premisas de las que partimos. Intentemos probar $\neg$ p.

—1.	$p \rightarrow \neg p \wedge \neg q$	
—2.	$\neg p \wedge \neg q \rightarrow p$	
3	p	
4.	$\neg p \wedge \neg q$	EI 1,3
5.	$\neg p$	EC 4
6.	$p \wedge \neg p$	IC 2,5
7.	$\neg p$	IN 3-6
8.	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	MT 2,7
9.	$p \vee q$	DM 8
10.	q	SD 7,9

Queda, pues, probado $\neg$ p y q, esto es, «la Oruga está loca» y «El Lagarto está cuerdo». Podría conseguirse el mismo resultado por otros procedimientos. Quizá el más sencillo sea el siguiente:

Escribamos la información que poseemos una vez formalizada:

$$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

Esta fórmula es verdadera:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
1

Atribuyamos a p el valor de verdad, 1, $\neg$ p valdrá, entonces, 0:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
1 1 0 1

La conjunción ha de ser verdadera para que lo sea el bicondicional o coimplicador:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
1 1 0 1 1

Pero esto no es posible ya que uno de los miembros de la conjunción vale 0. Luego en ningún caso p puede valer 1, o sea, vale 0. p es falso.

Supongamos ahora que p vale 0:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0 1 1 0

Para que el bicondicional valga 1, la fórmula conjuntiva ha de valer 0:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0 1 1 0 0

La conjunción es falsa sólo si $\neg$ q lo es:

$p \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0 1 1 0 0 0 1

Luego p es falsa y q verdadera.

* * *

El segundo problema que la Duquesa plantea a Alicia puede ser formalizado del siguiente modo:

$p \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; donde p sustituye a "La Cocinera está cuerda" y q "al Gato está cuerdo".

—1. $p \rightarrow \neg p \vee \neg q$
—2. $\neg p \vee \neg q \rightarrow p$

3	$\neg p$	
4.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	MT 2,3
5.	$p \wedge q$	DM 4
6.	p	EC 5
7.	$p \wedge \neg p$	IC 3,6
8.	p	IN3-7
9.	$\neg p \vee \neg q$	EI 1,8
10.	$\neg q$	SD 8,9

Luego «la Cocinera está cuerda» y «el Gato está loco».

Naturalmente idéntico resultado habríamos obtenido con el segundo procedimiento.

$$\begin{array}{cccccccc} p & \leftrightarrow & (& \neg & p & \vee & \neg & q) \\ 1 & 1 & & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Pero no es posible si p vale 0:

$$\begin{array}{cccccccc} p & \leftrightarrow & (& \neg & p & \vee & \neg & q) \\ 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Es imposible que la disyunción valga 0 si p es 0, pero el coimplicador no puede valer 1 si p es 0 y la disyunción es 1.

* * *

El tercer problema puede plantearse de esta manera: $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$; donde p significa «El Lacayo-Pez está cuerdo» y q «el Lacayo-Rana está cuerdo».

1.	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$	
2.	$\neg q)$	
3.	p	
4.	$(p \leftrightarrow q)$	EI 1,3
5.	q	EI 3,4
6.	$p \rightarrow q$	II 3-5
7.	$\neg p$	MT 2,6
8.	$\neg (p \leftrightarrow q)$	MT 1,7
9.	$\neg [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$	RTCO 8
10.	$\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)$	DM 9
11.	$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$	DM 10
12.	$p \vee q$	EC 11
13.	p	SD 2, 12
14.	$p \wedge \neg p$	IC 7, 13
15.	q	IN 2- 14

Es verdad q, «el Lacayo-rana está cuerdo». No es posible probar ni p ni ⅂ p, con las premisas de que disponemos. Este resultado podría haber sido alcanzado por el segundo procedimiento descrito:

p	↔	(p	↔	q)
1	1	1	1	1
0	1	0	0	1

* * *

El cuarto problema que la Duquesa plantea a Alicia versa sobre la cordura de los reyes de diamantes. «El rey de Diamantes está cuerdo» es p y «La reina de Diamantes está cuerda», q. Una vez que lo formulamos aparece clara la solución.

—1.	p ↔ (q ↔ ⅂ q)	
2.	p	
3.	(q ↔ ⅂ q)	EI 1,2
4.	⅂ p	EN 2,3

Ya que es evidente que (q ↔ ⅂ q) es una fórmula contradictoria. De igual manera podríamos haber resuelto el problema de este otro modo:

p	↔	(q	↔	⅂	q)
1	1	1	0	0	1
		0	0	1	0

La fórmula entre paréntesis es una contradicción, vale siempre 0. Es consecuencia, para que el coimplicador principal valga 1, p tendrá que valer 0.

* * *

A primera vista el siguiente problema es más enrevesado. Sea p, «el Sombrerero loco está cuerdo»; q, «la Liebre de Marzo está cuerda» y r, «el Lirón está cuerdo». Podemos formalizar la información de que disponemos del siguiente modo:

—1.	p ↔ [q ↔ ⅂ (p ∧ q ∧ r)]	
—2.	r ↔ q	
3.	p	
4.	[q ↔ ⅂ (p ∧ q ∧ r)]	EI 1,3
5.	q ∨ ⅂ q	IT
6.	q	
7.	⅂ (p ∧ q ∧ r)	EI 4,6

8.	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	DM 7
9.	$\neg r$	SD 3,6,8
10.	$\neg q$	MT 2,9
11.	$q \wedge \neg q$	IC 6,10
12.	$\neg q$	
13.	$p \wedge q \wedge r$	MT 4,12
14.	q	EC 13
15.	$q \wedge \neg q$	IC 12,14
16.	$\neg p$	EN 3-15
17.	$\neg [q \leftrightarrow \neg (p \wedge q \wedge r)$	MT 1,16
18.	$q \leftrightarrow (p \wedge q \wedge r)$	T1CO[4]
19.	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	ID 16
20.	$\neg (p \wedge q \wedge r)$	DM 19
21.	$\neg q$	MT 17,20
22.	$\neg r$	MT 2,21

A pesar de las diferencias aparentes, este acertijo lógico es muy similar al anterior. Igualmente podría haber sido resuelto mediante la elaboración de una tabla de verdad.

p	q	r	$p \leftrightarrow$	$[q \leftrightarrow$	$\neg (p \wedge r)]$	$\wedge$	$(q \leftrightarrow r)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1

* * *

[4] T1CO son las iniciales de Teorema 1 del coimplicador. Se trata de una regla de deducción natural muy simple e intuitiva:

$$\neg (A \leftrightarrow B)$$

$$A \leftrightarrow \neg B$$

Y también:

$$\neg (A \leftrightarrow B)$$

$$\neg A \leftrightarrow B$$

Una vez que hemos tomado práctica, no nos ha de costar continuar solucionando los acertijos de la Duquesa. El siguiente habla del Grifo, el Bogavante y la Tortuga. Sea p, «el Bogavante está cuerdo», q, «el Grifo está cuerdo»; r, «la Tortuga está cuerda». La información que nos proporciona la Duquesa puede formalizarse así:

—1.	$p \leftrightarrow [q \leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$	
—2.	$r \leftrightarrow q$	
3.	p	
4.	$q \leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$	ECO 1,3
5.	$q \vee \neg q$	IT
—6.	q	
7.	$(p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$	ECO 4,6
8.	$\neg(p \wedge q)$	EC 7
9.	$(p \wedge q)$	IC 3,6
—10.	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$	IC 8,9
11.	$\neg q$	
12.	$\neg[(p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)]$	MT 4,11
13.	$\neg(p \vee q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \wedge (q \wedge r)$	DM 12
14.	$\neg q \vee \neg r$	ID 11
15.	$\neg(q \wedge r)$	DM 14
16.	$\neg p \vee \neg q$	ID 11
17.	$\neg(p \wedge q)$	DM 16
18.	$\neg r$	MT 2,11
19.	$\neg p \vee \neg r$	ID 18
20.	$\neg(p \wedge r)$	DM 19
21.	$\neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$	IC 15,17,20
22.	$\neg(p \vee q \vee r)$	SD 13,21
23.	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	DM 22
24.	$\neg p$	EC 23
25.	$p \wedge \neg p$	IC 3,24
26.	$\neg p$	IN 3-25

Mediante la tabla de verdad habríamos logrado similar resultado: el Bogavante está loco y el Grifo y la Tortuga están cuerdos.