Selecciones

Las matemáticas y la naturaleza

Miguel Espinoza

> El matemático, también él (no sólo el físico), trata de esas cosas (superficies, volúmenes, longitudes y puntos), pero no las estudia en tanto que límites de los cuerpos materiales, no considera tampoco los atributos indicados en tanto que atributos de los cuerpos materiales. Por ello, los separa, pues en el pensamiento son inseparables del movimiento y ello no conlleva ninguna diferencia ni falsedad.
>
> ARISTOTELES

Es imposible aprehender la inteligibilidad de un fenómeno o de una situación sin situarse a una cierta distancia con respecto a ellos. Esta distancia está asegurada por el lenguaje, natural o formal. Cada sistema de símbolos que constituye un lenguaje determinado tiene su propio estilo de relación con las cosas y su modo de construir los enunciados y de transformarlos, es decir, su modo de engendrar la significación.

Este ensayo está dedicado a la relación, o a la ausencia de relación, entre las matemáticas y la naturaleza según las diferentes concepciones de las matemáticas.

El nominalismo, el empirismo, el realismo, etc., son modelos interpretativos de la evidencia empírica o de la evidencia racional; hay, pues, que esperar a que sean definitivamente ratificados o rechazados por la experiencia o la razón. Los lenguajes son sistemas complejos y no sabemos aún cómo han surgido; es así poco probable que una sola doctrina detenga la clave de las relaciones entre un lenguaje y la naturaleza; lo que es verdadero del lenguaje natural quizá no es necesariamente verdadero de la geometría o del análisis, o incluso de la música o de la pintura. Pero en filosofía no se trata sólo de resolver las discusiones: pueden revisarse a la luz de los nuevos acontecimientos, reinterpretarlas; señalar las ventajas o los inconvenientes de tal o tal idea según los objetivos que se hayan fijado. Puesto que es en el contexto de la inteligibilidad de la naturaleza que abordo las doctrinas y que este problema implica un contexto realista, señalaré las ventajas del realismo y los inconvenientes de otras filosofías.

I. El nominalismo o el miedo a ser engañado por las palabras

Es difícil inspirarse en las doctrinas nominalistas para estudiar la naturaleza. El nominalismo, como el positivismo, casi no afecta la investigación científica y los científicos difícilmente aprecian la pertinencia de las observaciones nominalistas. Una de las rupturas nominalistas con el realismo aristotélico consiste en negar que las esencias universales o que las especies existen en la realidad externa al sujeto; se encuentran en el espíritu, en el lenguaje, de ahí que la idea de la ciencia, el estudio del universal inmutable según los filósofos de la antigüedad y los medievales, se convierta principalmente en una cuestión de conceptos y de proposiciones y, de un modo secundario, en una cuestión relativa a las cosas. El lenguaje tiene una relación inmediata y transparente con él mismo y la certeza es así posible en relación a los conceptos y a las proposiciones, mientras que el tránsito a las cosas es un salto en lo incierto: se trata de uno de los rasgos principales del nominalismo.

Una vez que se ha asignado la prioridad al lenguaje, el paso al conocimiento de las cosas dependerá de las posibilidades del lenguaje, de su capacidad de crear la significación, de su manera de generar los enunciados, de sus poderes deductivos. El idealismo está inscrito en el nominalismo: el universo está en la palabra.

Las doctrinas nominalistas son escépticas y timoratas. El nominalismo no está seguro de haber tocado la realidad y tiene miedo a ser engañado y desorientado por el lenguaje. Ese miedo ha sido heredado por los filósofos analíticos que no se cansan de jugar con el lenguaje, no les gusta el riesgo intelectual. Al contrario, los realistas no retroceden fácilmente ante los obstáculos por llegar a lo real.

Una de las cuestiones principales a las que debe responder la filosofía matemática es la siguiente: ¿cómo podemos explicar que las matemáticas se apliquen a la naturaleza? Un nominalista, Hartry Field, responde que no se puede exigir a las matemáticas más que la consistencia, no la verdad. La teoría matemática debe ser una extensión conservadora de la teoría física, es decir que toda proposición de la teoría física probada con la ayuda de las matemáticas puede ser probada sin ellas. Si se respondiera que las matemáticas son verdaderas porque son un cuerpo de proposiciones derivadas de un conjunto de axiomas, H. Field diría, por su parte, que no hay razón para describir los axiomas como verdaderos: son ficciones.

Según H. Field, la explicación válida en la ciencia es la explicación intrínseca: está compuesta de elementos indispensables; son los elementos susceptibles de mantener relaciones causales. Por ejemplo, los electrones, elementos teóricos de la física, son causalmente pertinentes. Por el contrario, los números, entes ideales, no pueden mantener relaciones causales con los entes físicos: son, por tanto, elementos indispensables que forman explicaciones extrínsecas. Según H. Field, la ciencia sin números es posible, pero añade que esto no quiere decir que el científico deba prohibirse utilizar las matemáticas: permiten la elaboración de pruebas cortas y simples. Estamos lejos de Platón que considera que los números son divinos pues allí donde no están, no hay nada, salvo desorden y confusión; sin el conocimiento de los números estaríamos desprovistos de inteligencia y de moral.

La parte de las matemáticas que no hace referencia a entes abstractos y cuyo rol específico es la transmisión de la verdad, es la lógica, lo que no es desconocido por Field. Pero su error está en creer que toda matemática aplicada es reductible al aparato deductivo[1].

En la explicación es importante distinguir lo indispensable de lo dispensable, lo que existe de lo que no existe. En la medida en que el nominalismo es una contribución a esta investigación, es un gran programa. Aún más, Field tiene razón al decir que el problema principal de la filosofía de las matemáticas consiste en rendir cuentas de su aplicación al universo físico. Para los realistas, como Aristóteles, las matemáticas son verdaderas si se aplican adecuadamente a la realidad[2]. Los convencionalistas, como Poincaré, no ven otra cosa más que una comodidad[3]. Subrayan, por ejemplo, que nuestra percepción de la naturaleza no es suficientemente fina para decidir, entre varias estructuras geométricas, cuál es la verdadera.

Quien quiera mostrar exhaustivamente que las matemáticas de las ciencias pueden ser reemplazadas por la lógica tiene trabajo para rato. Considerad que la casi totalidad de las teorías matemáticas ha encontrado aplicación y las excepciones se cuentan con los dedos de una mano. Según Jean Dieudenné, entre las raras excepciones, se distingue la teoría de las categorías y el álgebra conmutativa[4]. Luego hay conceptos matematizados: en la física matemática, las matemáticas no son un lenguaje externo: sin ellas, las ideas, en esta disciplina, no existen pues las matemáticas juegan un papel constitutivo, están comprometidas[5]. ¿Cuáles son las probabilidades de éxito del programa nominalista en las teorías matematizadas? La ontología que sirve de soporte al universo del discurso de la lógica debe recoger muchas entidades —lo que

---

[1] Cf. Hartry FIEDL, *Sciencie without numbers*, Basil Blackwell, Oxford, 1980.

[2] Las relaciones entre las matemáticas y la naturaleza según Aristóteles están bien estudiadas en el libro de Th. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949.

[3] Henri POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, reed. Flammarion, 1986, p. 76.

[4] Cf. Jean DIEUDONNE, *Panorama des mathématiques pures*, Gauthier-Villars, 1979.

[5] Cf. e.g. J.-M. LEVY-LEBLOND, «Psysique et mathématiques». *Penser les mathématiques*, Seuil, 1982.

sería finalmente incompatible con el paisaje desértico vislumbrado por los lógicos. A menos de proponer que no sólo las matemáticas, sino igualmente la física, sea una ficción. Evidentemente, ésta no es la intención de H. Field.

H. Field, lógico, adopta como criterio de existencia los cuantificadores: ¿Qué es lo que debe existir para que los enunciados matemáticos sean verdaderos? Un criterio mejor es el de Aristóteles: considerad de qué manera las matemáticas son una abstracción del universo físico y por qué se aplican a él. Respuesta de Aristóteles: el matemático, como el físico, estudia el universo físico pero no en tanto que físico. Separa con el pensamiento lo que en la realidad está unido. Por ejemplo, una vez que los entes geométricos han sido separados de los entes físicos por medio de la abstracción, los primeros se liberan de las características sensibles, del devenir, y pueden ser, así, los objetos inmutables de una ciencia exacta, de la «geometría filosófica», según las palabras de Platón[6]. Los entes ideales separados por la abstracción pueden, seguidamente, desarrollarse y alejarse de los entes físicos, gracias al poder que tienen las matemáticas de generar ideas, de hacer abstracciones de abstracciones, etc. Las matemáticas se aplican al universo físico porque ellas encuentran en él su fuente primera.

Esta última idea no se encuentra en los nominalistas. Los entes matemáticos son ficciones, dicen los ficcionistas, útiles para la representación de la naturaleza o para el desarrollo de las matemáticas. Mario Bunge, ficcionista, dice que las fórmulas matemáticas no son compromisos con ninguna realidad en particular. La irrealidad de los entes matemáticos estaría probada por la ausencia de relaciones biunívocas entre los entes matemáticos y los entes físicos. La ecuación diferencial «$dy/dt=ky$» o la ecuación de la recta reciben una multiplicidad de interpretaciones. He ahí una consecuencia ontológica del nominalismo: las matemáticas son ficciones. No hay ninguna esperanza de conocer la realidad natural examinando las estructuras formales o los poderes generadores de las matemáticas[7].

El realista dirá que la multiplicidad de interpretaciones de las ecuaciones muestra que las analogías naturales existen, las semejanzas tanto de características que, como la búsqueda de simetría y de simplicidad, muestran que la naturaleza es inteligente. Pero el ficcionista coherente, como M. Bunge, responde que la explicación por analogía es ficticia. Una cosa es cierta: el ficcionismo en matemáticas exige el ficcionismo en física. El contenido de la física matemática es la naturaleza: esta ciencia aumenta el conocimiento por aproximación: expone una realidad ideal aproximada por la realidad natural. R. Torretti se pregunta cómo el conocimiento por aproximación sería posible si esas dos realidades, matemática y natural, no compartieran las mismas estructuras[8].

---

[6] Cf. A. WEDBERG, *Plato's philosophy of mathematics*, Almquist & Wiksell, Stockolm, 1955.

[7] Cf. M. BUNGE, *Treatise on basic philosophy*, Vol. 7, 1.ª Parte, Riedel, 1985.

[8] Cf. R. TORRETTI, «Three kinds of mathematical fictionalism» *in* AGASSI et COHEN, eds., *Scientific philosophy today*, D. Reidel, 1981.

De todas las posiciones que se pueden ocupar con relación a la naturaleza de las matemáticas y sus poderes para conocer la naturaleza, el nominalismo es la doctrina más negativa y escéptica.

II. El convencionalismo: la naturaleza no tiene siempre respuesta o una respuesta única a nuestras preguntas

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas y los resultados de las ciencias de la vida como la teoría de la evolución, la fisiología y la psicología de la percepción, han persuadido a los filósofos y a los científicos contemporáneos de Poincaré de lo infundado del apriorismo kantiano. Mientras que la mayoría de los que han criticado a Kant se han convertido en empiristas, Poincaré elaboró un nuevo conjunto de ideas, el convencionalismo, que incluye elementos del apriorismo y del empirismo.

En la base del convencionalismo geométrico se encuentra la idea de que el espacio físico es una variedad continua *sin dimensión intrínseca y métricamente amorfa*. El número de dimensiones y la métrica se imponen extrínsecamente, y hay varios modos de organizar el espacio: hay lugar para decisiones, para elecciones y convenciones. Supongamos que hemos elegido para medir una barra rígida; las medidas espaciales serán así el resultado de las relaciones entre la barra rígida y los objetos, que se suponen rígidos. La barra debe ser transportada, ¿permanecerá invariable? He aquí una pregunta cuya respuesta no depende de la experiencia sino de una convención. En situaciones parecidas no se puede decir que tal geometría es verdadera, verificada o refutada por la experiencia: una geometría se acomoda mejor que otra, se aplica mejor. La geometría euclidiana es adecuada para describir los objetos de la percepción corriente, a condición de suponer que éstos son y permanecen rígidos. Ahí donde un convencionalista ve una comodidad, un realista como Aristóteles vería una verdad.

Según Poincaré, hay una ambigüedad en la puesta a prueba de las geometrías físicas, situación claramente ilustrada por el argumento de la paralaje: «Si la geometría de Lobatchevsky es verdadera la paralaje de una estrella muy alejada será finita; si la de Riemann es verdadera, será negativa. Estos son resultados que parecen accesibles a la experiencia y se ha esperado que las observaciones astronómicas podrían permitir decidir entre las... geometrías. Pero lo que se llama línea recta en astronomía, es simplemente la trayectoria de un rayo luminoso. Si pues, por imposible, llegaran a descubrirse paralajes negativas, o a demostrar que todas las paralajes son superiores a un cierto límite, se tendría la elección entre dos conclusiones: podríamos renunciar a la geometría euclidiana o bien modificar las leyes de la óptica y admitir que la luz no se propaga rigurosamente en línea recta»[9].

---

[9] H. POINCARÉ, *op. cit.*, pp. 95-96.

Otra fuente del convencionalismo es la distinción hecha por Poincaré y subrayada por Pierre Duhem entre los componentes teóricos y los componentes empíricos de las teorías; por un lado el lenguaje, la matemática, por otro, la experiencia sensible. Se comprende así cómo los convencionalistas de fines del siglo XIX han podido preceder a los empiristas lógicos del siglo XX en sus problemas referentes a la naturaleza de las teorías, pues para estos últimos, lo que no depende de la experiencia sensible ni del dominio formal o simbólico, no tiene significación cognitiva.

Una vez que se ha trazado la distinción lenguaje-experiencia, se comprende que sea posible para dos teorías ser empíricamente equivalentes y, sin embargo, no serlo teórica o lingüísticamente. De donde surge una elección que hay que hacer entre los componentes lingüísticos de las teorías. En la medida en que las teorías son inconmensurables (intraducibles; lógica y empíricamente incomparables), se puede concebir que el proyecto realista de elaborar *una teoría* que sea la explicación de *un universo* esté mal fundado. El realista, por el contrario, no distingue tan nítidamente entre el lenguaje y la experiencia de la naturaleza[10].

Evidentemente, Poincaré estaría más cerca de estar de acuerdo con la doctrina realista que los otros convencionalistas más radicales que él. Recientemente, J. Giedymin ha intentado extraer la especificidad de las opiniones de Poincaré: no se puede confundirlas con las de LeRoy, Duhem o Ajdukiewick. Según el nominalismo idealista de LeRoy, los hechos absolutos no existen, los hechos son construidos por la actividad científica; no tenemos acceso a la realidad que está mediatizada por nuestras características en tanto que individuos y en tanto que especie animal: la división de la naturaleza expresa las características de nuestros organismos débiles. Las leyes son igualmente construcciones de nuestro espíritu, reflejan las características de nuestro discurso más que las de la naturaleza. Las teorías son reglas gramaticales.

Poincaré ha sostenido una postura mucho más objetivista. No es idealista. Cree que hay hechos, impuestos a los científicos, conocidos a través de los sentidos e independientes de la voluntad. Para describirlos y explicarlos, los científicos deben ponerse de acuerdo sobre algunas convenciones. No siempre es fácil distinguir los elementos reales de los elementos convencionales de una ley o de una teoría, pero ambos están presentes. ¿Cómo no estar de acuerdo con Poincaré en este punto? Las teorías reflejan la naturaleza más que nuestra forma de verla; son algo más que recetas prácticas. A pesar de los cambios teóricos, hay ecuaciones que permanecen verdaderas (considerad, por ejemplo, el paso de Fresnel a Maxwell), y si las ecuaciones permanecen verdaderas, es que las relaciones descritas son reales. Los componentes invariables de las

---

[10] Albert LAUTMAN, *Essai sur l'unité des mathématiques*, Union Générale d'Editions, 1977, pp. 284-285.

[11] Cf. Jerzy GIEDYMIN, *Science and convention. Essays on H. Poincare's philosophy of science and the conventionalist tradition*, Pergamon Oxford, 1982.

teorías son sus propiedades no convencionales. Según Poincaré, los elementos reales son desconocidos, pero sus relaciones reales son captadas por las ecuaciones que subsisten de una teoría a otra[12]. No se puede pues asociar Poincaré a LeRoy ni a Ajdukiewicz. Este último, como los empiristas lógicos recientes, ha adoptado un convencionalismo radical y ha visto más detenidamente los aspectos lingüísticos de las teorías (naturaleza del significado, de las reglas del lenguaje, de la traducción, etc.), asuntos sobre los cuales ni Poincaré ni Duhem han considerado útil detenerse.

Los rótulos son, con frecuencia, inoportunos porque los problemas de los filósofos no son nunca simples. Por ejemplo, según J. Giedymin, nada impidió a Poincaré ser kantiano en aritmética pues creía que los axiomas, y en particular el principio de inducción matemática, eran verdades sintéticas a priori; no kantiano en la filosofía del espacio, en geometría y en física; semi-empirista y semi-convencionalista en física; convencionalista en geometría. Hay que recordar que Poincaré quería comprender la naturaleza; el estudio de las características del sujeto del conocimiento y las posibilidades del lenguaje está sujeto a la filosofía de la naturaleza.

III. El empirismo: ¿son las matemáticas una ciencia de observación?

Ya he mencionado una de las preguntas importantes a las que debe responder la filosofía matemática: ¿Cómo podemos explicar que las matemáticas se apliquen a la naturaleza? Otro problema consiste en explicar el conocimiento propio de la matemática caracterizado por la exactitud en la formación de los conceptos, el rigor de las inferencias, el aire definitivo de las verdades. Es la razón por que la que Platón había considerado justo distinguir la matemática popular, basada sobre la experiencia sensible y capaz sólo de una verdad aproximativa, de la matemática filosófica fundada sobre las Formas matemáticas y exacta. Otros realistas en filosofía matemática tales como Frege y el Husserl de las *Investigaciones Lógicas,* han insistido igualmente sobre el hecho de que la existencia de un dominio objetivo, ideal, era la condición de posibilidad del conocimiento en matemáticas. Este dominio es la realidad matemática que se observa y que se descubre. A los matemáticos les gusta comparar el dominio matemático al de la física: los objetos y sus relaciones están ahí y no les podemos atribuir propiedades arbitrarias.

N. Bourbaki opina que esta visión realista está, al menos parcialmente, motivada por reacciones de orden psicológico: todo matemático que hace esfuerzos para elaborar una demostración sin lograrlo, o sin lograrlo fácilmente, tiene la impresión de chocar contra obstáculos objetivos puestos por el mundo externo[13].

---

[12] Cf. H. POINCARÉ, *La valeur de la science,* Flamarion, 1920, pp. 267 y ss.

[13] Cf. N. BOURBAKI, *Elements d'histoire des mathématiques,* Hermann, Paris, 1969, chap. 1. «Fondements des mathématiques».

La visión empirista de las matemáticas ha sido recientemente expuesta y defendida por Ph. Kitcher. Para él, no hay frontera estricta entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza. En ambos dominios, el conocimiento está condicionado por la evidencia empírica y el trabajo realizado por las generaciones precedentes[14].

El empirismo se construye, en gran medida, en oposición a las tesis aprioristas. El apriorista piensa que todos los enunciados conocidos en matemáticas pueden ser conocidos *a priori* siguiendo pruebas. Quine ha argumentado elocuentemente contra la supuesta claridad de la idea de analiticidad, que es, según él, una versión del apriorismo[15]. (Los lógicos no están de acuerdo en cuanto a las características de la relación entre lo *a priori* y lo analítico: es difícil, pues, saber en qué casos los argumentos contra lo analítico se aplican a *lo priori*)[16]. La estrategia de Quine ha sido mostrar que la comprensión de la idea de analiticidad es circular: se ha tratado de definir lo analítico haciendo referencia a la noción de significado que, por su parte, es comprensible en función de la sinominia, que presupone la analiticidad. De ahí la conclusión de que el límite entre lo analítico y lo sintético no está trazado: es un dogma. No existe verdad matemática que no sea revisable. Quine da como ejemplo el intento de revisar la lógica ortodoxa para acomodarla a las necesidades de la mecánica cuántica[17].

Según Quine, toda necesidad es natural: no hay razón de añadir una necesidad matemática *sui generis;* las matemáticas y la física forman un solo cuerpo. Los lógicos aficionados a las modalidades se han preguntado si lo necesario natural es idéntico a lo necesario matemático, si lo posible matemático y lo posible físico coinciden. La respuesta más popular es que las posibilidades matemáticas van más allá de lo posible natural: el proceso de construcción de los números naturales, sea cual sea ese proceso, puede ser continuado al infinito. Si uno estuviera de acuerdo con el fisicalismo de Quine, admitiría que tal proceso es, a fin de cuentas, físico: la capacidad de continuar al infinito es la capacidad física de hacerlo. Pero, ¿cómo saber lo que es físicamente posible sin referirse a la teoría física constituida por las matemáticas? Las posiciones coherentes no son fáciles de hacer fracasar.

Kitcher ha asimilado la enseñanza de Quine y añade otras dudas sobre el apriorismo. Una de esas dudas se refiere al carácter *a priori* de los enunciados que juegan un papel justificativo en las pruebas. En una demostración se pueden utilizar teoremas cuya demostración es muy larga. ¿Es compatible decir que un teorema es conocido *a priori,* y que su demostración es excesivamente larga? ¿Se puede estar seguro de que no se ha cometido error?

[14] Cf. Ph KITCHER, *The nature of mathematical knowledge,* Oxford U. P. 1983.

[15] Cf. W. V. QUINE, «Two dogmes of empiricism« in *From a logical point of view,* Harper, New York, 1953.

[16] Cf. Charles PARSON, *Mathematics in philosophy,* Cornell U. P. New York 1983, essay n.° 7 «Quine on the philosophy of mathematics«.

[17] Cf. QUINE, *Philosophy of logic,* Prentice-Hall, N. J., 1970, pp. 100 y ss.

El grado de certeza aumenta a medida que las demostraciones repetidas confirman el resultado, pero ¿se puede estar absolutamente seguro? En ese caso, las matemáticas no se diferencian de las ciencias naturales como la certeza absoluta *a priori* diferiría de una probabilidad *a posteriori*. Al hablar de justificación, hemos tocado un concepto estimado por Kitcher epistemólogo. El cree que es sobre todo en el proceso de justificación que el platonismo se muestra insuficiente.

Otra duda sobre el apriorismo se refiere a la intuición, esa visión inmediata y completa de la cual sería capaz el espíritu. ¿En virtud de qué prejuicio no examinado se puede decir que la visión intelectual es más fiable, está mejor justificada que la visión sensible? En el mejor de los casos, es decir, cuando se posee una idea clara de qué es una intuición (por ejemplo, la doctrina de Kant), lo más razonable es pensar que intuición y visión sensible son igualmente falibles. Hay varias geometrías coherentes y no una sola, la euclidiana, como creía Kant. En la percepción de una entidad, ¿cómo saber cuáles son las propiedades que reflejan necesariamente las estructuras mentales? ¿Y si las entidades no poseyeran exactamente las propiedades que creemos encontrar en ellas? Gödel habla, también él, de intuición: los axiomas son verdades impuestas a nosotros por la realidad matemática. Kitcher se pregunta si el sentimiento de evidencia no es más que una familiaridad adquirida por entrenamiento, por aprendizaje. Luego hay paradojas. Por ejemplo, la teoría de conjuntos muestra axiomas evidentes y paradojas, lo que debería de poner en guardia contra la pretendida infalibilidad de la intuición.

He aquí ahora una duda sobre el conceptualismo, forma de apriorismo que postula que poseemos un conocimiento *a priori* y fundamental de los axiomas gracias a los conceptos matemáticos (Locke, Frege). Podemos retomar los argumentos de Quine contra la pretendida claridad de la noción de significado en «Dos dogmas». Por ejemplo, la extensión de un concepto no depende sólo del significado (noción oscura según Quine, que hay que eliminar en lo posible), sino que depende sobre todo de hechos contingentes. Todo concepto tiene una evolución. Otros (relativistas y anarquistas) llegarán hasta proponer que los conceptos cambian radicalmente al punto de llegar a ser inconmensurables. Se aprecia la influencia innegable de la experiencia, lo que quita a las matemáticas su carácter incorregible o *a priori*. (Pensad, por ejemplo, en las correcciones de la conjetura de Euler, minuciosamente estudiadas por Irme Lakatos en *Pruebas y Refutaciones*).

¿Cuáles son los entes que pueblan la realidad matemática? ¿Cuál es la referencia de la figura «2»? No ha escapado a los convencionalistas ni a los empiristas que hay varias formas de reducir la aritmética a la teoría de conjuntos. La referencia de «2» podría ser $\{\{\emptyset\}\}$ tanto como $\{\emptyset\ \}\emptyset\}\}$. Así, el platónico está dividido entre aceptar que los números son conjuntos y la dificultad de decir cuáles son estos conjuntos.

Las críticas precedentes avanzadas por Kitcher tienen el mérito de mostrar lo que el platónico debe mejorar para hacer sus doctrinas más convincentes.

Pero ¿en qué consiste el empirismo? Nos recuerda que las matemáticas, como las otras ciencias, son aprendidas y que en este aprendizaje participa no solamente la experiencia personal, sino, sobre todo, la experiencia de numerosas generaciones desde los comienzos empíricos de las matemáticas en las preocupaciones prácticas de egipcios y babilónicos y de otros pueblos más antiguos aún, hasta la generación de nuestros profesores. Kitcher subraya los aspectos sociales de esta evolución: hay una adquisición transmitida por autoridades. El empirismo se ve también en la insistencia sobre el papel de la experiencia sensible en el aprendizaje de conceptos.

La idea de que las matemáticas son aprendidas y transmitidas debe ser atenuada por el reconocimiento de que, en este dominio, el cambio de significado existe y que lo que en un momento dado se presente como justificación de un enunciado, se revela más tarde, insuficiente, como resultado del proceso de profundización y de generalización típico de las disciplinas matemáticas. Es quizá obligado que en matemáticas aplicadas se recurra a la experiencia sensorial para construir o encontrar modelos. ¿Y en matemáticas puras? Aquí tampoco, dice Kitcher, se pueden negar las raíces empíricas. Un trabajo importante para el epistemólogo sensible a la historia es el de mostrar cómo las imponentes teorías modernas se han desarrollado a partir de un número reducido de conceptos obtenidos de la observación y la manipulación de objetos naturales.

Queriendo distanciarse de Kuhn y de Feyerabend, Kitcher advierte que no es relativista: se puede estar atento a los aspectos psicológicos y sociales de una ciencia sin, por ello, acoger necesariamente el relativismo. Esta aclaración era previsible pues Kitcher cree en la evolución y progreso de las ciencias, e intenta comprenderlos, mientras que ese progreso, aunque real o evidente, es para el relativista coherente una ficción o un misterio. La razón es que para el relativista no hay medida común entre las teorías ni entre los conceptos de teorías diferentes, de ahí la pluralidad de teorías y de visiones del mundo aceptadas por el relativista. La medida común permite la comparación, la evaluación, la elección, el progreso.

Las críticas del apriorismo son razonables y el programa empirista de Kitcher es *prima facie* atractivo, aunque parezca de difícil realización. ¿Puede el empirismo cubrir el vacío de explicación, de garantía, dejado por el platonismo? No hay en este contexto exigencia más legítima hacia el empirismo, pues es presentada por el mismo Kitcher contra el apriorismo. ¿O es preciso decir que la justificación no se encuentra en ninguna parte y que hay que contentarse con el hecho de que toda ciencia es falible? Pero los que piensan que las matemáticas son *a priori* continuarán diciendo que el rol de la prueba en matemáticas, cuando existe, no es idéntico al rol de la observación y la experiencia en las ciencias comúnmente calificadas de empíricas: la función de la prueba es positiva, se halla una verdad en acto, mientras que el papel de la experiencia y la observación es, con frecuencia, negativo, mostrar que una hipótesis debe ser corregida, o bien si el papel es positivo, convierte una hipótesis en verosímil, no en algo verdadero. Pero el falibilista coherente dirá que en todas las ciencias, las matemáticas incluidas, sólo la posibilidad de la verdad existe.

El apriorista insistirá sobre «el hecho» de que la percepción parece incapaz de justificar y dar cuenta de la exactitud de los conceptos y del rigor de las ciencias formales. Por ejemplo, dibujando un triángulo y considerando enseguida una rotación de 180° en el plano alrededor de un punto, se puede sugerir algunas propiedades de la simetría central (en geometría plana). Pero la percepción de los trazados no puede justificar estas sugerencias ya que nosotros mismos no estamos siquiera seguros de haber dibujado ni rectas ni un triángulo. El empirista Dingler no estaría de acuerdo pues, según él, los arquitectos y los albañiles, los astrónomos y los ingenieros construyen y utilizan líneas rectas todos los días.

Cualquiera que piense que la geometría aprendida a través de la percepción sensorial está justificada, debe creer que sólo la geometría euclidiana es natural y justificada. ¿Cómo considerar entonces a las otras geometrías? Creo más acorde con los hechos reconocer que la geometría es, a la vez, una ciencia natural y una metafísica *a priori* pues atribuimos al universo estructuras aprendidas o aplicables sobre un espacio local. Me parece también que esta ambigüedad empírica *a priori* convierte a la geometría apta para actualizar la inteligibilidad natural: posee la ventaja de las ciencias formales y exactas, permaneciendo sensible al contenido natural. Por otra parte, lo que puede ser verdad de la geometría o de algunos de sus elementos, no lo es necesariamente de toda la geometría o del resto de las matemáticas: el eclecticismo no es raro en filosofía matemática. ¿Cómo afirmar que todo deriva del espíritu si hay en ciertos dominios axiomas poco inteligibles o «monstruos» como las funciones continuas sin derivada que muestran que la intuición nos puede engañar? ¿Cómo afirmar que todo viene de la experiencia si el número infinito y los universales existen? Es razonable pensar que en la elaboración de las matemáticas lo racional y lo empírico colaboran para poder descubrir la inteligibilidad intrínseca de la naturaleza.

IV. El negativismo falibilista

Una de las expresiones más claras del falibilismo en matemáticas se encuentra en los escritos de Imre Lakatos que aplican los esquemas popperianos[18]. Las pruebas engendran las objeciones y las objeciones incrementan las conjeturas en un movimiento dialéctico donde pruebas y refutaciones se atraen mutuamente porque cada cual puede aportar lo que falta a la otra. Las pruebas sin objeciones no existen; la certeza definitiva y completa es una ilusión, dicen los falibilistas; en una demostración puede

[18] Cf. Imre LAKATOS, *Proofs and refutations*, Cambridge U.P., 1976.

haber lemas triviales, silenciados, que pueden revelarse falsos o inconsistentes. La corrección es evidente, sobre todo en matemáticas: las definiciones son claras y sus deficencias son rápidamente captadas. La crítica descubre que incluso el enunciado considerado como *a priori* y verdadero es refutable; puede transformar una prueba en explicación. La tarea de la filosofía de las ciencias no es ni la búsqueda de los fundamentos ni la justificación, sino la explicación del crecimiento del conocimiento. La ciencia progresa gracias al método de pruebas y refutaciones. Señalo que este método recuerda al estilo de los medievales: la ciencia deviene actividad argumentativa y el filósofo, lógico o abogado. ¿Trabajan las matemáticas como lo prescribe o describe el falibilista? Gran parte del tiempo construyen teorías guiados por su imaginación y su conocimiento más que por la crítica encarnizada.

Examinemos el ejemplo dado por Lakatos, la conjetura de Euler relativa a los poliedros: sea un poliedro cualquiera, se obtiene $S-A+F=2$, donde S es el número de vértices, A el número de aristas y F el número de caras. Contemplemos un cubo: $8-12+6=2$, o una pirámide de base triangular: $4-6+4=2$. Esta característica queda verificada en varios poliedros, aun en los casos un tanto raros, como el del gran dodecaedro estrellado: $20-30+12=2$. Pero los contraejemplos no tardaron en aparecer: para el «erizo» o poliedro estrellado de Kepler, constituido por doce pentágonos estrellados, se obtiene -6, a saber: $12-30+12$; o bien si consideramos el cuadro, aunque es un poliedro: $S-A+F=O$.

¿Qué hacer con estos contraejemplos? La respuesta muestra la posición filosófica adoptada (se constata así la continuidad de las matemáticas con la filosofía). Según una versión fuerte del dogmatismo, se debe fundar la ciencia sobre bases sólidas y justificar seguidamente cada enunciado utilizando como paradigma la deducción lógica. Más que el descubrimiento, lo que cuenta es la certeza y el rigor de la prueba. La mejor prueba es analítica, deductiva: uno no se contenta con experiencias mentales o pruebas intuitivas. Se deben elaborar teoremas definitivamente y completamente verdaderos. Los contraejemplos son monstruos. Hay que descartarlos, por ejemplo, añadiendo los lemas que inmunizan las hipótesis o por la vía del cambio de significado de, al menos, un concepto clave, o bien mostrar que no son contraejemplos.

Una forma de dogmatismo es el conjunto de doctrinas formalistas que tienden a identificar las matemáticas con su abstracción axiomática formal. Es característico del formalismo, según Lakatos, no tener en cuenta la historia de las matemáticas y ser incapaz de explicar su desarrollo. El formalismo está ligado al positivismo lógico, específicamente a su criterio de significación: un enunciado tiene un sentido si, y sólo si, es analítico (tautológico) o empírico. Sin embargo, las matemáticas no formales no son ni lo uno ni lo otro: estarían vacías de sentido, lo que un falibilista considera inaceptable.

Según opinión del falibilista es nefasto descartar los contraejemplos: éstos no son monstruos, sino excepciones que hay que tomar en serio. El resultado es que se está obligado a mejorar la conjetura. Suponed que el poliedro sea definido como un sólido cuya superficie está constituida por caras poligonales. Si una objeción se plantea sobre el «hecho» que un poliedro es un sólido, se puede mejorar la conjetura de Euler por un juego de topología: un poliedro puede ser deformado, estirado sobre un tablero: es así una superficie constituida por un sistema de polígonos. Las objeciones pueden hacernos restringir el teorema a ciertos tipos de polígonos. Se aprecia la dificultad de refutar una idea: se puede mejorar, convertirla en algo más sofisticado. Se ve, también, lo que aproxima al falibilismo y al empirismo: la historia de las ciencias es indispensable para la epistemología; incluso los procedimientos más abstractos parecen haber sido establecidos sobre el fuego de la crítica.

V. La ventaja del realismo

¿Se trata de comprender la aplicación de las matemáticas a la naturaleza (el problema principal de la filosofía de las matemáticas)? Aquí el neopositivista no ve el problema: las matemáticas son un instrumento deductivo para la obtención de consecuencias de hipótesis empíricas, mientras que Whitehead considera la posibilidad de las matemáticas para expresar el orden del universo. No tenía simpatía por las actitudes nominalistas o intuicionistas, pero no era panmatemático: todo no es estructura, existe la materia y sus misterios. Todo no es abstracto: están los procesos, los contenidos concretos. La naturaleza no es sólo matemática, es también estética. Esta es la razón por la cual el carácter abstracto de las matemáticas pone límites a su capacidad de expresar verdades sobre el mundo. Las matemáticas, como todas las ciencias, encuentran sus límites en su aplicación.

Si las matemáticas son las ciencias de la estructura, ¿qué es la estructura? ¿Cómo se presenta en el conjunto de los acontecimientos y de los objetos? Si expresan el orden, ¿qué es el orden? Si las matemáticas son el conocimiento de la abstracción pura, ¿qué es la abstracción? Si las matemáticas son el conocimiento de las relaciones necesarias en el dominio de lo posible, ¿qué son la necesidad y la posibilidad? Se ha comprendido: no hay filosofía de las matemáticas sin metafísica. (Pero, en general, ¿qué queda de la filosofía de las ciencias si se suprime la metafísica?).

La metafísica es la ciencia de los primeros principios y de las entidades últimas. Unamuno no es el único en indicar las semejanzas entre la metafísica y la novela que refleja la personalidad del autor más que la naturaleza. Pero la metafísica no es así concebida por los que quieren separar la filosofía de la ciencia. Whitehead dice que los primeros principios y las entidades últimas son indispensables en la construcción de las teorías: sin ellos, los componentes más próximos de la percepción inmediata o aquellos que por una razón u otra son evidentes, no tienen finalmente un sentido. Se plantea el problema de la naturaleza de la explicación: ¿qué es una explicación adecuada? Por ejemplo, ¿se puede hacer física sin dirigirse a la materia?, y la materia, ¿tiene un sentido sin sustancia?

El método que justifica la metafísica es la retroducción, la búsqueda de hipótesis o de una nueva teoría exigida por el descubrimiento de fenómenos inexplicados. La imaginación juega el papel central. Whitehead lo ha visto bien, pues la deducción no crea la inteligibilidad, se limita a transmitir la de las leyes, y el empirista radical que piensa que se puede avanzar de lo particular a lo general, del presente al pasado y al futuro sin teoría preconcebida, no puede ni siquiera comenzar la investigación pues, si es coherente, no tiene instrumento para distinguir los datos de los elementos sin pertinencia.

Según Whitehead, uno puede escalar la abstracción en varias etapas. Se comienza por la realidad compuesta de entidades existentes o actuales de la que forman parte los objetos eternos. Los objetos eternos simples que mantienen relaciones forman un nuevo objeto eterno complejo. Varios de estos objetos complejos e interconectados forman un nuevo objeto eterno aún más complejo que el precedente, etc. Son construcciones elaboradas en el dominio de lo posible; es el camino seguido por los matemáticos «puros», mientras que a los «aplicados» les interesa seguir igualmente el camino inverso: se trata de descender la escala de la abstracción para tocar el grupo de base compuesto de objetos eternos simples. Se tiene así la posibilidad de describir la estructura formal de los acontecimientos. Pero la proximidad de las entidades actuales es solamente asintótica puesto que los acontecimientos evolucionan y su contingencia impide a la necesidad matemática de aprehenderlos exacta y completamente. Las matemáticas, como la física y como toda ciencia, son un conocimiento aproximativo y falible, corregible, pero las matemáticas son más perfectas pues son más abstractas. El falibilismo matemático no quiere decir, evidentemente, que las abstracciones sean ficticias porque según el pitagorismo whiteheadiano los objetos eternos están naturalmente conectados a las entidades existentes. Las matemáticas están inscritas en la naturaleza[19]. Constituyen una reserva de formas subyacentes a los procesos naturales, idea abundantemente ilustrada para J. Largeault en *Principios clásicos de interpretación de la naturaleza* (1988).

He tenido ya ocasión de indicar algunas de las características de la actitud realista: contra el argumento nominalista que no ve relaciones biunívocas entre las fórmulas y los procesos reales, he subrayado que para el realista la analogía natural existe, es decir el isomorfismo entre dos o varios procesos naturales *prima facie* sin estructura común (por ejemplo el isomorfismo del movimiento de péndulo y la oscilación de un circuito eléctrico). Coherentemente, el realista piensa que el razonamiento por analogía, forma de inducción, es legítimo en la medida en la que se apoya en las semejanzas observadas. Por el contrario, la coherencia del nominalista para quien las matemáticas son ficticias, consiste en decir que el razonamiento por analogía es ficticio.

Muchos científicos no han apreciado que se explica con la ayuda de

[19] Cf. A. N. WHITEHEAD, *Science and the Modern World*, chap. 2 «Mathematics in the history of thought» y cap. 10 «Abstraction»; The concept of nature, cap. 4 «The method of extensive abstraction».

modelos: Duhem se burlaba de los físicos ingleses para quienes las características de los modelos parecían convertirse en fenómenos tangibles. Dirac pensaba que lo esencial de la ciencia es la elaboración de las leyes que gobiernan los fenómenos y su aplicación a los descubrimientos. B. d'Espagnat ve el modelo, sobre todo, como un instrumento pedagógico para la explicación de hechos difíciles a un público no especialista. La opinión de C. P. Bruter es diferente: escribe que todo modelo es analogía y que éste es el método fundamental de la ciencia. «La taxonomía reposa sobre la analogía, la búsqueda de la causa se apoya sobre la observación de las semejanzas de las formas, en la proximidad de los bordes, de los objetos «consecuentes» los «unos a los otros». Los modelos son indispensables a la investigación, sirven como reveladores de la realidad. Un modelo es una proyección de un objeto o de un proceso sobre un espacio que sirve de pantalla, tiene sobre lo real representado la ventaja de ser estable en relación a los desplazamientos en el espacio y en el tiempo. Es fácilmente reproducible. Goza de un grado más o menos elevado de universalidad. Permitiendo detectar analogías ocultas en las cosas, conduce la diversidad a la unidad. Podemos evaluar un modelo según su riqueza (cantidad de características compartidas con lo real representado), su universalidad o potencia (la extensión del campo de aplicación), y según su precisión en relación a la percepción.

El realismo de Bruter se manifiesta en su creencia en la existencia de una lógica interna que guía la transformación del mundo y a la cual correspondería eventualmente un metamodelo que contendría todos los otros y se extendería al universo entero. La razón produce los modelos deterministas a los cuales responden la repetición de los fenómenos, la estabilidad del universo. Los modelos geométricos son los modelos matemáticos más aptos para representar la dinámica de la naturaleza y de la vida pues el pensamiento geométrico se sitúa entre las ideas algebraicas, rígidas y la probabilidad incomprensible[20].

Hay que situarse en el punto de vista del filósofo de la naturaleza para apreciar los aspectos reales de las matemáticas. Realistas y empiristas están de acuerdo en decir que las matemáticas son (también) una ciencia de observación, una ciencia donde lo empírico y lo *a priori* colaboran para captar la inteligibilidad de los procesos naturales. Esta colaboración está claramente percibida en mecánica y, en general, en la física matemática: a la necesidad y a la universalidad de las relaciones lógico-matemáticas se unen los resultados de las medidas. Luego para reencontrar lo natural en los aspectos *a priori,* hay que descubrir las bases físicas y biológicas de las estructuras fundamentales de la lógica y de la matemática. El realista piensa que esas estructuras no se han desarrollado al azar, sino gracias a fuerzas físicas y biológicas y que el papel principal o primero del lenguaje es representar el entorno físico, biológico, económico para convertir la acción y la previsión en algo posible.

[20] Cf. C. P. Bruter, *Sur la nature del mathematiques,* Gauthier Villars, París, 1973 y *Les architectures du feu. Considérations sur les modèles,* Flammarion, París, 1982.

Para desarrollar la filosofía de la naturaleza hay que ir más allá de ciertas distinciones o ideas que obstaculizan el estudio de la naturaleza, tal como las distinciones matemáticas puras-matemáticas aplicadas, calidad-cantidad y la asociación de las matemáticas a la cantidad exclusivamente. Los pitagóricos han ordenado todas las realidades en una docena de oposiciones donde la mitad son de orden matemático: limitado-infinito, impar-par, uno-múltiple, derecha-izquierda, macho-hembra, reposo-movimiento, recto-curvo, luz-oscuridad, bueno-malo, cuadrado-oblongo[21]. Esta tabla muestra que según los pitagóricos, los mismos mecanismos que explican la realidad matemática, explican la realidad física y que hay una continuidad de una realidad a la otra, de ahí la idea, esencial en la filosofía de la naturaleza, que se puede estudiar la naturaleza matemáticamente. Estamos lejos de los escrúpulos exagerados de los nominalistas que quieren separar el lenguaje de la naturaleza hasta el punto de convertirla en algo ininteligible. Empiristas y falibilistas pretenden ser los únicos en explicar el crecimiento del conocimiento: los primeros recurren al trabajo acumulado de generación en generación, los otros, a las discusiones, al método de conjeturas y refutaciones. El realista platónico reconoce que hay procesos de naturaleza lógica, más profundos que los procesos mencionados por los empiristas y los falibilistas, que hacen el crecimiento posible. Una gran parte de la investigación de Albert Lautman explica que el progreso en matemáticas es el resultado de la tensión entre ideas opuestas, aún más abstractas que las matemáticas: simetría-asimetría, local-global, finito-infinito, continuo-discreto. Según Lautman, estas ideas dialécticas actúan en un plano subyacente a las matemáticas y son dominantes con respecto a esta ciencia; reencuentra la tradición platónica[21].

Contra los convencionalistas radicales, he mencionado la idea de Poincaré, según la cual la verdad se encuentra en aquello que permanece invariable de una teoría a otra. Si en la evolución de una teoría o en el cambio de teoría hay ecuaciones que permanecen, esto quiere decir que se han captado relaciones reales. De Platón a Poincaré, la constancia de los criterios de verdad y de realidad es lo invariable: se considera que se ha comprendido la naturaleza cuando se muestra invariable se haga lo que se haga.

De todas las actitudes examinadas, la realista es la más apta para captar la contribución irremplazable de las matemáticas a la filosofía de la naturaleza.

Título original: Les mathématiques et la nature
Tomado de *Archives de Philosophie*
(Les Fontaines, 51 - 60500 CHANTILLY, Francia), 1988, pp. 177-193

Traducción: Alicia Villar (revisada por el Autor)

---

[21] Cf. Abel REY, *La jeunesse de la science greque, La Renaissance du livre,* París, 1933, pp. 374 y ss.

[22] Cf. Albert LAUTMAN, *op. cit.,* p. 290. Cf. igualmente R. THOM, «Qu'est-de que la science» in *Approches du réel,* Le Mail Radio France, 1986, p. 129.