Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático
¿Es posible compatibilizar postulados pragmáticos y realistas sobre las matemáticas?

Juan Díaz Godino

Resumen

Presentamos una síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática en cuya elaboración venimos trabajando desde hace varios años y que proporciona herramientas conceptuales y metodológicas para plantear y abordar problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. Como rasgos característicos destacamos la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. El modelo de cognición matemática elaborado se adopta como elemento clave sobre el que basar el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa.

Abstract

In this paper we synthesise the theoretical model about mathematical cognition and instruction we are developing in the past years, and which provides conceptual and methodological tools to pose and deal with research problems in mathematics education. We highlight the following main features of this approach: the articulation of the institutional and personal facets of mathematical knowledge; the recognition of the key role of language; and the coherent assumption of pragmatic and realist posits for the meaning of mathematical objects. This theoretical framework is used to base the development of a theory of mathematical instruction.

1. La ontología y la epistemología matemática como problema para la didáctica de las matemáticas

El fin específico de la didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Para lograr este objetivo, la didáctica de las matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, sociología, etc. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de los sistemas didácticos. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la didáctica de las matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en didáctica de la matemática no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?
- ¿Qué papel desempeñan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- ¿Las matemáticas se descubren o inventan?
- ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?
- ¿Cuál es el papel que desempeñan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

Es necesario reconocer, no obstante, la complejidad de estas cuestiones y la variedad de posibles respuestas. Como escribió Alberto Dou en el prólogo del libro de Cañón (1993), “La ontología de las entidades matemáticas y aún más su epistemología son interpretadas de modo increíblemente dispar y permanecen en el misterio” (p. 14). Sin embargo, esta dificultad no puede implicar la renuncia a la clarificación de estas cuestiones, si se desea progresar en el establecimiento de un programa de investigación coherente y productivo en didáctica de las matemáticas.

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de didáctica de la matemática explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. En el trabajo de Sierpinska y Lerman (1996), sobre epistemología de las matemáticas y de la educación matemática, podemos observar la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exige aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar en un verdadero programa de investigación (Lakatos, 1983).

Uno de los principales problemas "meta-didácticos" que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema ni incluso dentro de la aproximación que suele describirse como "epistemológica" o "didáctica fundamental" (Gascón, 1998). Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, competencias, concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar: la faceta ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos).

Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo-pragmatismo, cognición individual-institucional, constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la didáctica de las matemáticas.

2. Hacia un enfoque unificado de la cognición y la instrucción matemática

Desde hace más de 10 años estamos interesados en la problemática descrita de fundamentación de la investigación en Didáctica de las Matemáticas y estamos desarrollando diversas herramientas teóricas que permitan abordar algunas de las cuestiones mencionadas. En Godino (2003, cap. 2)[1] describimos con detalle los antecedentes teó-

[1] Los trabajos citados de Godino y cols. están disponibles en Internet, http://www.ugr.es/local/jgodino.

ricos en los que apoyamos el sistema de nociones sobre el conocimiento matemático que proponemos para el estudio de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Podemos describirlo brevemente como la elaboración de un enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática sobre bases ontológicas y semióticas específicas. Estas herramientas se han desarrollado en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra indagación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1993-98 (Godino, 1996, Godino y Batanero 1994; 1998) desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En una segunda etapa (a partir de 1998) hemos considerado, sin embargo, necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta dicha fecha. Esta reflexión surge del hecho de que el problema epistémico- cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones".

Como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos "los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas". Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas, y los propios medios expresivos y argumentativos desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953).

Nosotros hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa de nuestro trabajo nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática[2] (Godino, Contreras y Font, en prensa). Proponemos distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas). El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

El modelo ontológico-semiótico que sintetizamos en los apartados siguientes trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo.

[2] Entendida como enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos en el seno de los sistemas didácticos.

Así mismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

3. Herramientas teóricas que componen el enfoque ontosemiótico

3.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento[3].

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta: ¿Qué es el objeto matemático media aritmética?, ¿qué significa o representa la expresión "media aritmética"?, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos" [4]. Con esta formulación del significado el EOS (enfoque ontosemiótico) asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción" (Faerna, 1996; p. 14).

[3] Las instituciones se conciben como "comunidades de prácticas", e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados.

[4] Se trata de una interpretación de la máxima pragmática de Peirce.

3.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, propiedades, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones). Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como "objetos personales"[5].

3.3. Relaciones entre objetos: Función semiótica

Se adopta de Hjelmslev (1943) la noción de función de signo[6] como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido, significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Para nosotros, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, accio-

[5] Los "objetos personales" incluyen a los constructos cognitivos tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

[6] Descrita por Eco (1979) como *función semiótica.*

nes, conceptos, propiedades y argumentos) pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas.

3.4. Configuraciones de objetos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos y en su doble versión, personal e institucional.

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficos...) representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican las acciones y propiedades que relacionan los conceptos entre sí. Se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, propiedades, operaciones, etc.).

3.5. Dualidades cognitivas

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- personal – institucional: si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales";
- ostensivo (gráficos, símbolos...) – no ostensivo (entidades que se evocan al hacer matemáticas, representados en forma textual, oral, gráfica, gestual...);
- extensivo – intensivo: un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo *concreto*, p.e., la función y=2x+1) y una clase más general o *abstracta* (p.e., la familia de funciones, y = mx+n);
- elemental – sistémico: en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio;
- expresión – contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos a una investigación en el campo del razonamiento combinatorio.

Los tipos de objetos descritos, sintetizados en la figura 1, (sistemas de prácticas, entidades emergentes, configuraciones, las dualidades cognitivas, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional básica), constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático.

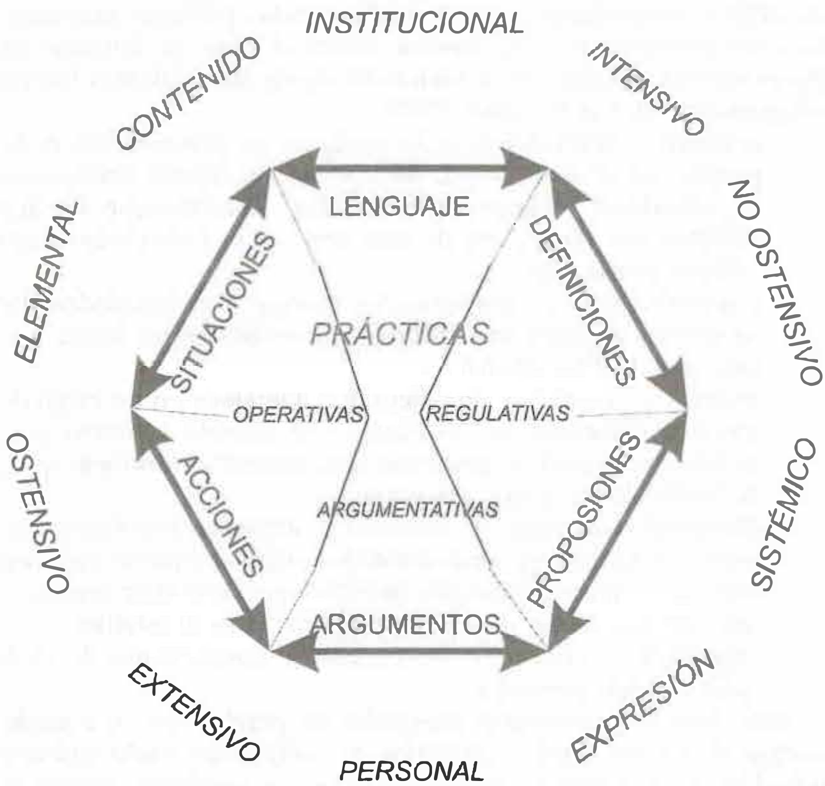

Figura 1: Ontosemiótica del conocimiento matemático

3.6. Enfoque semiótico de los conocimientos matemáticos

La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O (sea ostensivo, no ostensivo; elemental o sistémico, etc.) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Uno de los puntos diferenciadores de nuestro modelo teórico está en la descomposición analítica que proponemos para los conocimientos, tanto personales como institucionales. Junto a los conocimientos procedimentales y conceptuales (técnicas, conceptos y proposiciones) consideramos necesario distinguir los conocimientos situacionales o fenomenológicos (situaciones-problemas, tareas), conocimientos lingüístico-notacionales y conocimientos argumentativos-validativos (Godino, 2002).

Por otra parte, consideramos que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos.

La construcción y comunicación de los significados de los objetos matemáticos requiere, por una parte, reconocer una relatividad institucional y contextual para el mismo, y por otra parte, aceptar la existencia de un punto de vista realista-referencial para dichos objetos usualmente asumida por el matemático profesional (Wilhelmi, Lacasta y Godino, en prensa). Articular estas dos visiones supone el reconocimiento de un contexto de uso intra-matemático donde se realiza la descripción de la estructura formal (común a otros contextos de uso) y la fundamentación de la matemática como un cuerpo de conocimiento[7].

4. *Reflexiones finales*

El EOS viene creciendo como marco teórico para la didáctica de las matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas. Pero somos conscientes que el resultado no es una "teoría didáctica", o que no se refiere sólo a problemas didácticos. El EOS incluye una manera

---

[7] De esta manera nos parece posible (al tiempo que necesario) articular posiciones estructuralistas (Hellman, 2005) y naturalistas (Maddy, 2005) en nuestra manera de mirar a las matemáticas.

especial de concebir las matemáticas, su naturaleza y origen (una onto-epistemología de las matemáticas) y una manera especial de concebir el lenguaje, la representación y significación de las matemáticas (una semiótica matemática). ¿Cuáles son las conexiones y filiaciones del EOS con las corrientes filosóficas clásicas y actuales? Entre las fuentes inmediatas que nos han servido de base figura en particular la "teoría antropológica de lo didáctico" (TAD) desarrollada por Chevallard (1992). Pero tanto la TAD como el EOS se nutren de un trasfondo cultural y filosófico que entronca con el pragmatismo clásico (Peirce, James, Dewey, Lewis), con la visión antropológica de las matemáticas y el giro lingüístico propuesto por el segundo Wittgenstein, y en el caso del EOS con el realismo naturalista, el holismo y el "compromiso ontológico" de Quine. Sin embargo, estas cuestiones sobre la fundamentación filosófica del EOS siguen abiertas y tendrían que ser abordadas posiblemente en interacción con los profesionales de la filosofía. La inclusión de este artículo en Diálogo Filosófico es para nosotros una buena oportunidad de iniciar esta necesaria interacción.

REFERENCIAS

CAÑÓN, C. (1993). *La Matemática: Creación y Descubrimiento,* Universidad Pontificia Comillas, Madrid.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1), 73-112.

ECO, U. (1991). *Tratado de semiótica general.* Barcelona, Lumen, 1979).

FAERNA, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento.* Madrid: Siglo XXI.

GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18(1): 7-33.

GODINO, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. PUIG y A. GUTIERREZ (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417- 424), Universidad de Valencia.

GODINO, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 22 (2/3): 237-284.

GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico- semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathêmatiques,* 14 (3): 325- 355.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. SIERPINSKA y J. KILPATRICK (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y ROA, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1): 3-36.

GODINO, J. D., CONTRERAS, A. y FONT, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (aceptado).

GODINO, J. D. y RECIO, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thoughy, language and context in mathematics education. En A. OLIVIER y K. NEWSTEAD (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

HELLMAN, G. (2005). Structuralism. En, S. SHAPIRO (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (p. 536-589). Oxford: Oxford University Press.

HJELMSLEV, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos, 1971.

LAKATOS, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza.

MADDY, P. (2005). Three forms of naturalism. En, S. SHAPIRO (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (p. 437-459). Oxford: Oxford University Press.

PEIRCE, Ch. S. (1965). *Obra lógico-semiótica.* Madrid: Taurus, 1987.

SAUSSURE, F. (1915). *Curso de lingüística general.* Madrid: Alianza, 1991.

SIERPINSKA, A. y LERMAN, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

WILHELMI, M. R., LACASTA, E. y GODINO, J. D. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques* (aceptado)

WITTGENSTEIN, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

Enero de 2006

Juan Díaz Godino
Universidad de Granada