Reflexión y crítica

Un intento de aproximar las tradiciones en filosofía de la matemática

Jesús Alcolea Banegas

Resumen

Se analizan y evalúan las dos tradiciones de la filosofía de la matemática, la corriente principal o académica y la corriente disidente, a partir de las contribuciones de algunos de sus partidarios, y se las intenta aproximar a través de la concepción naturalista de P. Maddy y el problema de la objetividad matemática.

Abstract

Two traditions in philosophy of mathematics, mainstream or academic and maverick, are analysed and evaluated, taking into consideration the main contributions by some of their proponents, and an effort is made into bringing them near through P. Maddy's naturalist view and the problem of mathematical objectivity.

1. Introducción: dos tradiciones

Para la filosofía, la matemática ha tenido siempre una importancia capital. La reflexión sobre esta ciencia ha inspirado las principales partes de la metafísica y la epistemología, ha impulsado el desarrollado de la lógica formal y ha estimulado, en buena parte del siglo XX, los intentos más sofisticados de trazar los *fundamentos* de la matemática. Sin embargo, en las últimas décadas, la filosofía de la matemática ha entrado en una nueva fase, debido a la lucha que los filósofos han llevado, y siguen llevando, con dos problemas compli-

* Deseamos dar las gracias al Ministerio de Ciencia y Educación por apoyar este trabajo (Proyecto: HUM2005- 00365/FISO), a J. P. Úbeda por sus observaciones y a Camino Cañón por facilitar su inclusión en esta revista.

cados y apremiantes. En un artículo seminal, Paul Benacerraf[1] planteó dos preguntas que podrían formularse así: "Si la matemática trata de algo, ¿qué es ese algo?" y "Si tenemos conocimiento matemático, ¿cómo llegamos a tenerlo?". Como él mismo observó, resulta difícil dar respuesta a ambas preguntas. Pues, en principio, consideramos que son verdaderos aquellos enunciados que contienen términos que pretenden referir a *objetos matemáticos*: números, conjuntos, funciones, espacios, etc. Si los enunciados son verdaderos, entonces los objetos deben existir. Pero hay tantos de estos objetos que no podemos identificarlos con partes del mundo físico y, en todo caso, no parece que la verdad matemática dependa de lo que ocurra con los objetos de ese mundo. Por tanto, nos vemos impulsados a asumir la existencia de un mundo de objetos más allá de lo espacio-temporal, es decir, una especie de cielo platónico cuyos moradores son descritos por nuestros axiomas y teoremas. Por otro lado, parece que sabemos algo de matemáticas, es decir, conocemos algunos enunciados, de modo que debemos tener alguna forma de detectar las propiedades de ese universo platónico y de sus habitantes. Si adoptamos la idea de que el conocimiento es creencia verdadera producida de modo fiable, entonces parece que debe haber alguna correlación o conexión sistemática entre las propiedades de los objetos matemáticos y las creencias que tenemos sobre ellos. Pero, si estos objetos están fuera del espacio y del tiempo, entonces esa conexión no puede ser producida del único modo de que somos conscientes al conectar las creencias con los objetos, a saber, mediante una ligazón causal. Así, a la hora de pensar sobre la verdad matemática, nos vemos empujados hacia el platonismo. Y al pensar sobre el conocimiento matemático, nuestra reflexión nos lleva a recordar que nuestro pensamiento no es, después de todo, platónico[2].

Buena parte de la labor llevada a cabo en filosofía de la matemática en los últimos años ha intentado hacer frente a este dilema. Los intentos se dividen, de forma natural, según comiencen con uno u otro de los dos grandes problemas. Muchos filósofos académicos comienzan inclinándose por la ontología, continúan elaborando una

---

[1] P. BENACERRAF, "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy*, 70 (1973), pp. 661-680. Recogido en W. D. HART (ed), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1996, pp. 14-30.

[2] Hemos tratado más en profundidad estas cuestiones en J. ALCOLEA, "Ontological and Epistemological Problems of Mathematics", en W. J. GONZÁLEZ y J. ALCOLEA (eds), *Contemporary Perspectives on the Philosophy of Science*, A Coruña, Netbiblo, aparecerá en 2006.

concepción acerca del contenido de las verdades matemáticas y dejan para el final la explicación acerca de cómo las conocemos. Unos cuantos "disidentes"[3], muchos de los cuales se muestran dispuestos a conectar nuestro conocimiento con el desarrollo histórico del tema, proceden en la dirección opuesta, considerando como primer objetivo identificar los tipos de procesos que producen conocimiento matemático, para pasar después a investigar cuales de esos procesos, si es que hay alguno, podrían proporcionarnos conocimiento. La tendencia "natural" de la tradición disidente es hacia el *naturalismo*. Ahora bien, ¿es posible conciliar ambas tradiciones?

2. La tradición académica

Con gran claridad y profundidad, Michael D. Resnik y Stewart Shapiro[4] han elaborado diferentes versiones de un programa que resultará atractivo para quienes consideren que la ontología ha de ocupar el primer lugar. Habitualmente, los matemáticos distinguen entre aquellas ramas de su ciencia que poseen un contenido específico —la aritmética de los números reales serviría de ejemplo— y aquellas otras que se interesan por los tipos de estructuras. En este caso, por ejemplo, hemos abandonado la idea de que la geometría de Euclides es sobre el espacio *físico* a favor de la propuesta de que describe un tipo particular de espacio, esto es, una estructura que satisface los axiomas euclidianos. Algunos creen que deberíamos pensar en *todos* los campos matemáticos desde esta segunda forma estructural. Las propuestas estructuralistas tienen una ventaja que casi se percibe de forma inmediata: se pueden evitar cuestiones espinosas acerca de los objetos de que hablamos cuando hacemos el cálculo. La teoría de conjuntos suministra modos diferentes de elaborar objetos que tienen todas las propiedades de los números reales. Los iniciados en el tema aprenden que hay varias formas, diferentes, de "definir" rea-

[3] De acuerdo con el nombre (*maverick*) que les dieron PHILIP KITCHER y WILLIAM ASPRAY en "An Opinionated Introduction", en W. ASPRAY y PH. KITCHER (eds), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis, University of Minnesota Press, 1988, p. 17.

[4] Nos referimos, de forma particular, a M. D. RESNIK, *Mathematics as the Science of Patterns*, Oxford, Clarendon Press, 1997, y S. SHAPIRO, *Philosophy of Matematics. Structure and Ontology*, Oxford, Oxford University Press, 1997. Sobre el estructuralismo de estos y otros autores, puede consultarse CHARLES S. CHIHARA, *A Structural Account of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 2004, cap. 4.

les, que son adecuadas para una presentación rigurosa del cálculo. Pero, quien acepta la idea de que los números son objetos definidos tiene que explicar cómo podemos discernir tales objetos. Con todo, para los estructuralistas la aritmética podría caracterizarse como aquella estructura que es compartida por todos los sustitutos conjuntistas. Ahora bien, pensando en el preocupante problema del conocimiento matemático, un estructuralista podría inclinarse por la idea de que las verdades matemáticas son generalizaciones de los objetos físicos cotidianos, es decir, aquellos objetos físicos que ejemplificarían las estructuras matemáticas. Desgraciadamente, esa propuesta tropieza con las limitaciones del mundo físico, pues debemos recordar que no hay un número suficiente de objetos físicos para ejemplificar muchas, si no todas, de las estructuras que los matemáticos caracterizan. En este punto, el estructuralismo queda dividido.

Algunos estructuralistas, como Geoffrey Hellman[5], creen que las nociones modales de posibilidad y necesidad pueden explicar la verdad matemática. La idea es más o menos así: al considerar un determinado dominio matemático, es posible que los objetos físicos satisfagan sus axiomas; en este caso, las verdades del dominio valdrían necesariamente de cualesquiera objetos que vinieran a satisfacer los axiomas. Otros, incluyendo a Resnik y Shapiro, piensan que las estructuras son entidades abstractas. Es obvio que esta versión no permitirá resolver el dilema de Benacerraf, a menos que las estructuras así entendidas, nos sean accesibles. Por ello no resulta sorprendente que tanto Resnik como Shapiro dediquen gran atención a explicar sus nociones de estructura y a sugerir de qué modo podríamos obtener conocimiento de ella. Resnik propone el holismo epistemológico, de acuerdo con el cual ninguna tesis de la ciencia teórica puede ser confirmada o refutada de forma aislada, sino sólo como parte de un sistema de hipótesis. Siguiendo a Quine, Resnik defiende esta posición contra las objeciones y la aplica a nuestro conocimiento al proponer que las tesis matemáticas sean confirmadas a través del amplio éxito de las matemáticas. Quedamos justificados, sostiene, al permitir que los matemáticos desarrollen sus propios cánones de evidencia, debido a que su obra es enormemente útil a la hora de formular y elaborar la ciencia natural. Resnik continúa ofreciendo una cuidadosa explicación de los patrones (*patterns*) y de las posiciones (*positions*) en patrones, con que identifica a

[5] G. HELLMAN, *Mathematics Without Numbers*, Oxford, Oxford University Press, 1989; y "Three Varieties of Mathematical Structuralism", *Philosophia Mathematica* (3), 9 (2001), nº 2, pp. 184-211.

los objetos tradicionales de la matemática. Sin embargo, se plantea un gran problema en relación con nuestra capacidad para obtener conocimiento de esos patrones. Aunque comienza acentuando el holismo, Resnik acaba proponiendo que nuestro conocimiento de los patrones abstractos quede mediatizado por "plantillas" (*templates*), concebidas como "recursos concretos para representar el modo en que las cosas son conformadas, estructuradas o diseñadas" (p. 227). Así, su preocupación inicial permanece: ¿no se supone que nuestras percepciones de los rasgos observables de las plantillas proporcionan un acceso fiable a las características de los patrones abstractos? A pesar de toda su ardua labor, aún parece haber un momento mágico en el que las formas platónicas dejan una impresión sobre nosotros. Pero esta impresión no es más que eso, pues como Mark Balaguer ha mostrado "no podemos descubrir una razón racional para creer o no creer en objetos abstractos al estudiar la teoría y la práctica matemática, es decir, no hay buenos argumentos a favor o en contra del platonismo"[6].

La versión estructuralista de Shapiro tiene mucho en común con la de Resnik, sobre todo en su compromiso con el "estructuralismo *ante rem*", que contempla las estructuras, consideradas previas a sus instanciaciones físicas, como objetos abstractos. En el punto en que Resnik pretende conectar las estructuras con nuestras nociones cotidianas de patrón y caracterizar de modo preciso las relaciones entre patrones, Shapiro ofrece una teoría axiomática de las estructuras que resulta muy interesante. Sin embargo, de nuevo, se ha de hacer frente al desafío epistemológico. Aunque Shapiro concede que el dilema de Benacerraf constituye un problema muy serio, el sentido de su seriedad comienza a evaporarse cuando toma el camino supuestamente seguro del reconocimiento de patrones. Aludiendo a bibliografía psicológica, reconoce (p. 189) el carácter dinámico y estructural de los conceptos matemáticos en las fases de aprendizaje de los niños. Al recordarnos los modos que éstos tienen de reconocer letras y al insistir en que podemos usar las conocidas representaciones mediante puntos o palitos para familiarizarnos con los patrones para los números pequeños —haciendo frente a las dificultades con patrones mayores y con el infinito—, Shapiro nos ofrece una explicación del desarrollo inicial del conocimiento en los matemáticos. Lo que sigue siendo un misterio es cómo los tipos de percepciones de los niños y las manipulaciones que llevan a cabo ofrecen información sobre los

6 M. Balaguer, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1998, p. 4.

tipos de objetos —estructuras *ante rem*— que para él componen la ontología de la matemática.

En *A Subject With No Object*[7], John P. Burgess y Gideon Rosen intentan impulsar las simpatías por alguna explicación platonista (en sus términos, "antinominalista") de la matemática, pero no elaborando una posición ontológica y epistemológica propia, sino a través de una concienzuda revisión de las diversas formas en que los filósofos (nominalistas) han tratado de evitar la inclusión de objetos abstractos en sus ontologías. Comienzan con una lúcida explicación de los motivos que puede haber para inclinarse por el realismo, que, en nuestra opinión, resulta defectuosa por una excesiva tendencia a minimizar la necesidad de la explicación causal de la fiabilidad de los procesos que generan y sostienen nuestras creencias matemáticas. Sugieren, por ejemplo, que no deberíamos preocuparnos más por las contingencias que encontramos en la vía hacia el conocimiento conjuntista que por el proceso histórico que lleva a la aparición de la Relatividad General. Sin embargo, ello pasa por alto un aspecto esencial: Einstein puede haber ocupado un puesto crucial en el desarrollo de la física moderna, como Cantor en el caso de la teoría de conjuntos, pero aunque aceptáramos su existencia contingente, hay una diferencia importante, y obvia, entre nuestra capacidad para explicar cómo la actividad de Einstein permitió obtener información fiable sobre las cosas descritas en sus teorías y nuestra carencia de una capacidad similar para el caso de Cantor. Buena parte de la discusión de Burgess y Rosen es una revisión de las dificultades de las principales estrategias nominalistas. En este sentido, resulta pertinente que se concentren en el intento de prescindir de los conjuntos y de los números en favor de los puntos espacio- temporales[8], y sobre el estructuralismo modal. Aunque se trata de una obra sumamente

[7] J. P. Burgess y G. Rosen, *A Subject with No Object. Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1997. El lector interesado por esta propuesta debería leer antes los artículos de Ch. Chihara, "Nominalism", y de G. Rosen y J. P. Burgess, "Nominalism Reconsidered", recogidos en la obra editada por S. Shapiro y citada en la nota 10, caps. 15-16.

[8] Esta estrategia fue seguida por Hartry Field en su obra más discutida: *Science Without Numbers. A Defence of Nominalism*, Princeton, Princeton University Press, 1980. Field intenta mostrar que las teorías físicas poseen axiomatizaciones naturales sin referencia a objetos matemáticos abstractos. Con ello pretende socavar los argumentos (que tienen su origen en Quine) a favor de la existencia de objetos abstractos basados en la pretendida indispensabilidad de éstos para el desarrollo de la ciencia. Véase, no obstante, Ch. Chihara, *A Structural Account of Mathematics*, cap. 5.

compleja, desde el punto de vista técnico y filosófico, las posiciones quedan elaboradas con bastante claridad y son evaluadas con escrupulosa atención a los éxitos y fracasos.

En nuestra opinión, las obras de Resnik, Shapiro, y Burgess y Rosen profundizan el dilema de Benacerraf. Por lo que respecta a los objetos matemáticos abstractos, parece que no podemos vivir con ellos, a pesar de los denodados esfuerzos de Shapiro y Resnik por explicar el tema. Pero tampoco podemos vivir sin ellos, si se toman en consideración las dificultades presentadas por Burgess y Rosen. Las contribuciones de estos pensadores son sintomáticas de la sensación de estancamiento en que parece encontrarse la filosofía académica dominante[9]. Quizás deberíamos pasar a su rival, la tradición disidente que incluye a los filósofos que ven la filosofía de la matemática en el espejo de la filosofía de la ciencia, los matemáticos que se impacientan con lo que consideran un puro escolasticismo analítico y unos cuantos compañeros de viaje de la historia, la psicología y la sociología de la ciencia.

3. La tradición disidente

En la tradición disidente, la obra de Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*[10], es tan influyente como la obra de Benacerraf lo es en la tradición dominante. Lakatos ofreció una reconstrucción racional de una secuencia de episodios de la historia de la matemática. Su objetivo fue identificar de qué forma el conocimiento se desarrolla, y su obra ha inspirado ciertas concepciones epistemológicas. En lugar de exigir, como los filósofos de la tradición dominante, una explicación del conocimiento matemático de un individuo, algo que revelaría cómo los seres humanos están justificados para creer lo que creen con independencia de su sociedad o la historia de las investigaciones de

[9] Obsérvese que ello radica en las dificultades de superar el dilema de Benacerraf, no en la riqueza de "problemas, posiciones y frentes de batalla", tal y como muestra la monumental obra S. SHAPIRO (ed), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford, Oxford University Press, 2005.

[10] I. LAKATOS, *Proofs and Refutations. Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, Cambridge University Press, 1976. (Hay traducción de C. Solís, *Pruebas y refutaciones*, Madrid, Alianza, 1978). Hemos analizados y evaluado las propuestas de Lakatos en J. ALCOLEA, "Vigencia del pensamiento filosófico-matemático de Imre Lakatos", en W. J. GONZÁLEZ (ed), *La Filosofía de Imre Lakatos. Evaluación de sus propuestas*, Madrid, UNED, 2001, pp. 177-215.

esa sociedad, los disidentes rechazan el ideal epistemológico individual, perseguido en general por R. Descartes y, para el caso de la matemática, por G. Frege.

¿Cómo sabemos la matemática que sabemos? Una respuesta disidente diría que casi todos los humanos recibimos con la enseñanza casi toda la matemática que sabemos, y hemos extendido lo que aprendimos sólo en dosis muy pequeñas. Unos pocos talentos hicieron algo más demostrando nuevos teoremas. Entre esta elite, una minoría modifica la matemática añadiendo algún nuevo concepto, definición, principio, etc. Así, la principal labor al explicar nuestro conocimiento consiste en exponer esa rica herencia matemática, y para comprender el desarrollo de ese conocimiento basta con identificar (los criterios de) la racionalidad de estas poco frecuentes, pero cruciales, modificaciones, de modo que finalmente podemos rastrear nuestro conocimiento hasta sus primitivas raíces históricas. Por ello, deberíamos rechazar las fantasías epistémicas individualistas y avanzar bajo la bandera del naturalismo.

Sin embargo, en el hotel del naturalismo hay muchas habitaciones. Algunas están ocupadas por matemáticos profesionales que han reflexionado sobre las diferencias entre las explicaciones filosóficas y la idea que ellos tienen del tema al que se dedican. Así, Reuben Hersh, en un libro ingenioso y lleno de aforismos, *What is Mathematics, Really?*[11], revisa las explicaciones que los filósofos han ofrecido de lo que sea una demostración y las compara con aquellos rasgos de la demostración que los matemáticos destacarían, subrayando más su papel explicativo que el deseo de un tipo de certeza que él considera ilusoria. Por ello, ofrece una visión falibilista del conocimiento, sosteniendo además que los objetos matemáticos son una clase especial de objetos sociales, culturales e históricos. Aquí, como en otras de sus obras, Hersh no formula posibles respuestas a sus interrogantes con el fin de que sus oponentes se plantearan la posibilidad de aceptar sus ideas. En su lugar, ofrece ejemplos con el fin de mostrar cómo

[11] R. HERSH, *What is Mathematics, Really?*, London, Jonathan Cape, 1997.

[12] Nos tememos que la atención que, en la actualidad, prestan los representantes de una tendencia a lo que hacen los de la otra es prácticamente nula. Basta con buscar posibles referencias cruzadas entre la obra editada por S. Shapiro, mencionada en la nota 10, y R. HERSH (ed), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, Berlin, Springer, 2005. El abismo entre ambas parece inconmensurable. Puede consultarse también T. TYMOCZKO (ed), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 2ª edición revisada y ampliada, 1998.

se vive y se practica la matemática, con lo que hace frente a un amplio abanico de concepciones filosóficas, en la mayor parte de las cuales encuentra serias deficiencias. En nuestra opinión, este tratamiento tan poco metódico podría molestar a los filósofos de la tradición dominante que se aventuraran a prestarle atención[12].

Es probable que la contribución de Paul Ernest tampoco sea evaluada favorablemente por la comunidad filosófica académica. Inspirándose sobre todo en Lakatos y Wittgenstein, Ernest intenta, en *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*[13], desarrollar una explicación sistemática del contenido de la matemática y de nuestro conocimiento matemático. Su epistemología es explícitamente historicista: sabemos lo que sabemos porque somos los últimos en un largo proceso de indagación y heredamos las habilidades de nuestros antepasados. Ernest organiza esta idea de un modo sutil e instructivo, ofreciendo una "lógica generalizada del descubrimiento matemático" que promete dar cuenta de importantes aspectos del desarrollo del conocimiento. Hasta ese punto, muchos filósofos quedarán intrigados por las pretensiones de Ernest, antes de pasar a la explicación que éste ofrece del contenido y objetividad de la matemática[14]. De acuerdo con esta "filosofía constructivista social de la matemática", debemos identificar el "conocimiento objetivo" con "lo que es aceptado como legítimamente garantizado por la comunidad matemática" (p. 147). Se trata de un paso muy atrevido, pero que libera a Ernest de la necesidad de identificar los tipos de procesos que podrían extender (o corregir) de forma fiable un conjunto de creencias matemáticas, necesidad que Lakatos y otros historicistas interesados por la metodología de la matemática sí reconocerían. Así, el constructivismo social se imagina la matemática como una serie de "conversaciones" llevadas a cabo por los protagonistas de cualquier modo que ellos consideren útil. El conocimiento recién generado puede ser conocimiento subjetivo u objetivo, y un rasgo único de este constructivismo es que une ambas formas de conocimiento en un ciclo creativo en el que cada una contribuye a la renovación de la otra. En este ciclo, el camino

---

13 P. Ernest, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, SUNY Press, 1998.

14 Un compañero de viaje de Ernest, pero más radical, es el sociólogo David Bloor, quien ha cuestionado la objetividad y la verdad absoluta del conocimiento matemático y ha defendido un relativismo cultural. Véase su *Knowledge and Social Imagery*, Chicago, IL, University of Chicago Press, 2ª edición, 1991 (Hay traducción de E. Lizcano, *Conocimiento e imaginario social*, Barcelona, Gedisa, 1998).

seguido por el nuevo conocimiento transcurre *desde* el conocimiento subjetivo, esto es, la creación o aportación personal de un individuo, vía publicación, *hasta* el conocimiento objetivo sirviéndose del examen, la reformulación y la aceptación intersubjetiva. El conocimiento objetivo es interiorizado y reconstruido por individuos, durante el aprendizaje de la matemática, hasta convertirse en conocimiento subjetivo. Al usar este conocimiento, los individuos crean y publican nuevo conocimiento, completando con ello el ciclo. Así, el conocimiento subjetivo y el conocimiento objetivo contribuyen a la creación y recreación mutua. Las nociones "absolutistas" de verdad deben entonces ser abandonadas y, al perderlas, nos vemos liberados de las inútiles dificultades que presenta la ontología de la matemática. La solución sencilla es que "el discurso de la matemática crea un dominio cultural dentro del cual los objetos de la matemática son constituidos por los signos matemáticos en uso" (p. 193).

Resulta obvio que la tendencia disidente ya se ha dividido en un ala conservadora y en un ala radical. Los conservadores, próximos a Lakatos, presentarán objeciones a la adopción que Ernest hace del relativismo, pues las decisiones de una comunidad de matemáticos que declarara que 2+2=5 no tendrían poder para conseguir que esas declaraciones constituyeran "conocimiento objetivo" o para constituir un nuevo dominio de objetos. Si se desea llegar a una concepción de la objetividad sin apelar a objetos matemáticos, la línea más prometedora es proponer que el desarrollo de los lenguajes matemáticos quede gobernado por reglas, especificarlas y explicar lo que les confiere un estatus privilegiado. Ello deja una ardua tarea al aspirante a historicista y el constructivismo social no brinda un sustituto bastante eficaz[15].

Como en el caso de Hersh, la principal contribución de Ernest es expandir nuestros horizontes epistemológicos exponiendo algunos patrones en el desarrollo del conocimiento matemático. Pero los naturalistas podrían encontrarse cómodos en otro ámbito. En *The Number Sense*[16], Stanislas Dehaene proporciona una introducción accesi-

---

15 Para un análisis y evaluación más detallados de la posición de Ernest, véase J. ALCOLEA, "El conocimiento matemático en el constructivismo social", en M. S. MORA ET ALII (eds), *Actas del III Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y filosofía de la Ciencia en España (Donostia-San Sebastian, 26-29 de abril de 2000)*, San Sebastián, Universidad del País Vasco, 2000, pp. 321-329. Sobre las raíces del problema acerca de si el conocimiento está socialmente condicionado, puede verse C. CAÑÓN, *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid, UPCO, 1993, pp. 359 y ss.

16 S. DEHAENE, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, London, Penguin Books, 1998.

ble a algunos de los datos psicológicos y neurofisiológicos sobre el uso de conceptos aritméticos en nuestra especie y en otros animales. Algunas de las explicaciones resultan controvertidas, pero quienes busquen una explicación naturalista del conocimiento matemático necesitan reemplazar las puras especulaciones con lo que las ciencias pertinentes pueden enseñarnos y es aquí donde Dehaene es una valiosa guía. Defiende la existencia de algo en nuestro cerebro que subyace al pensamiento matemático y lo torna posible[17]. En busca de qué pueda ser, los neurobiólogos han encontrado varios casos de "epilepsia aritmética", un síndrome que se identificó en el examen electroencefalográfico de una mujer epiléctica. Al resolver problemas aritméticos, las ondas cerebrales de la mujer mostraban descargas rítmicas y el cálculo provocaba ataques epilépticos, mientras que la lectura carecía de efectos.

Del estudio de Dehaene parece quedar claro que los niños nacen con mecanismos innatos para individualizar objetos y extraer el número de pequeños conjuntos. Este "sentido numérico" también se encuentra presente en los animales y, por tanto, es independiente del lenguaje y posee una larga historia evolutiva. En los niños, la estimación numérica, la comparación, el cómputo y la adición y la sustracción a un nivel muy sencillo se presentan de forma espontánea sin demasiada instrucción. Parece, además, que la región parietal inferior de ambos hemisferios cerebrales alberga los circuitos neuronales dedicados a la manipulación de cantidades numéricas.

Con respecto a la realidad matemática, Dehaene se inclina por el carácter insostenible de la posición platonista: "Aun cuando la introspección de los matemáticos les convenza de la realidad tangible de los objetos que estudian, este sentimiento no puede ser otra cosa que una ilusión. Es de suponer que uno puede convertirse en un genio matemático sólo si posee una notable capacidad para formar intensas representaciones mentales de conceptos matemáticos abstractos, imágenes mentales que pronto se convierten en una ilusión, eclipsando el origen humano de los objetos matemáticos y dotándolos de la apariencia de una existencia independiente". En todo caso,

[17] Sólo a título informativo, nos gustaría llamar la atención sobre otro intento programático de defender que la matemática es una creación de la mente humana, la cual es una mente encarnada o incorporada (*embodied mind*). Este proyecto, contra las filosofías tradicionales de la matemática y contra las concepciones constructivistas sociales radicales, ha sido elaborado por G. LAKOFF y R. E. NÚÑEZ, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York, Basic Books, 2000.

"la estructura de nuestro cerebro define las categorías de acuerdo con las cuales aprehendemos el mundo a través de la matemática" (pp. 242-243 y 245).

Quienes aprecien el cuidado con que Resnik, Shapiro, Burgess y Rosen presentan ideas y argumentos complejos probablemente retrocederán ante las formulaciones de Hersh, Ernest y Dehaene, y los considerarán poco metódicos, faltos de rigor, confusos e incluso irrelevantes. Otros invertirán el juicio, considerando que los disidentes adoptan nuevas y audaces posiciones, mientras que los filósofos más ortodoxos se dedican al análisis puramente lógico. En nuestra opinión, todas las posiciones merecen un análisis cuidadoso. La filosofía de la matemática sólo puede beneficiarse si quienes se dedican a ella, informados por las visiones más amplias, aunque incompletas, intentan articular sus concepciones con el rigor desplegado por los representantes de la tendencia dominante.

4. *Aproximando las tradiciones*

Ninguno de los partidarios de ambas tradiciones negaría objetividad al conocimiento matemático. La discrepancia podría radicar en la forma de conseguir esa objetividad. Pero, en nuestra opinión, y en este punto, se pueden aproximar las posturas. Veámoslo.

Hoy el uso dominante de objetividad pertenece a la epistemología (conocimiento objetivo) o a la metodología. La objetividad metodológica es principalmente un rasgo de las investigaciones o de los métodos de investigación, y derivadamente de las personas que llevan a cabo las investigaciones y los juicios que emiten como resultado. En una primera aproximación, decimos que una investigación es 'objetiva' cuando su trayectoria no se ve afectada de manera relevante por los sesgos peculiares, las preferencias, los compromisos ideológicos, etc. de las personas que las llevan a cabo. Pero parece que, de acuerdo con la retórica que rodea este tema, uno de los sellos de lo objetivo es precisamente su independencia o autonomía de nuestras teorías o concepciones. Podemos hablar de propiedades y relaciones objetivas, y en algunos casos incluso de objetos objetivos. Por ejemplo, P es una propiedad objetiva si es un hecho objetivo que un objeto la posee; y el objeto x es objetivo si el hecho de que x existe es un hecho objetivo.

Ante esta manera de hablar, el problema de la objetividad de la matemática debe entenderse como un problema sobre si propiedades como la verdad son rasgos de algún mundo matemático objetivo. Es decir, ¿son los hechos matemáticos completamente independientes de nuestro pensamiento, o son de algún modo construidos por él? Se trata de un problema que se puede tratar sin la ontología, en particular sin que nuestro lenguaje se refiera a objetos reales o abstractos. Por otro lado, se puede pensar que los objetos reales o abstractos con los que el lenguaje está ligado tornan nuestro razonamiento en algo irrelevante, o por lo menos que desempeñan un papel secundario con respecto a las relaciones previamente existentes y a las que no tenemos acceso. La carencia de objetos preexistentes, o el hecho de hacer caso omiso de ellos si por casualidad existen, nos deja la libertad de usar varios tipos de lógica en lugar de tener que depender de la lógica correcta, cualquiera que ésta pueda ser. Con este problema suele relacionarse la contribución de Georg Kreisel[18]. Muchos matemáticos subscribirán la antigua idea de que el análisis de los conceptos o nociones intuitivos permite la extensión de las reglas y de las definiciones que fijan sus propiedades. Pero entonces, y en una línea claramente naturalista, lo que esa idea da por presupuesto es que, como Kreisel diría, "las nociones intuitivas tienen significados, sea en el mundo externo o en el pensamiento" y que "una formulación precisa de lo que tiene significado en un tema es el resultado, no el punto de partida, de la investigación en ese tema" (pp. 138-139). Obsérvese, no obstante, que las nociones que tienen significado son relacionales y, en el fondo, tan objetivas y compartibles como los objetos. No estamos, entonces, muy lejos de Frege, para quien "un concepto sólo se puede fijar por sus relaciones con otros conceptos", relaciones que, al formularse "en determinados enunciados, las llamo axiomas"[19].

En esta línea, los partidarios de ambas tendencias deberían prestar atención a una reciente contribución de Penelope Maddy[20]. Aunque en alguna ocasión fue una incondicional defensora del realismo matemático[21], esta filósofa ofrece su propia y sofisticada visión del naturalismo. Al compararla con la versión de Quine, deja claro que

---

[18] Sólo nos referimos a G. KREISEL, "Informal Rigour and Completeness Proofs", en I. LAKATOS, (ed), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland, 1967, pp. 138-171.

[19] G. FREGE, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford, Blackwell, 1980, p. 51. Que la idea de Frege no ha perdido vigencia nos lo muestra el matemático contemporáneo I. STEWART al sostener que en la matemática estudiamos las formas en que diferentes conceptos se relacionan entre sí (*De aquí al infinito. Las matemáticas hoy*, Barcelona, Crítica, 1998, p. 14).

[20] P. MADDY, *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1997.

[21] P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1990.

el espíritu fundamental de todo naturalismo conlleva que el éxito de la matemática o la ciencia ni debe hacerse depender "de la crítica desde, ni necesita el apoyo de, un punto de vista externo, supuestamente superior" (p. 184). Esto resultaría satisfactorio para Hersh, pues deja intacto "el derecho [que tenemos los matemáticos] a hacer la matemática como la hacemos"[22], pero al mismo tiempo desvela la neutralidad metafísica de este naturalismo, pues es consistente con diferentes concepciones en torno a la naturaleza de los objetos.

Maddy comienza con una cuestión de marcado sabor epistemológico y metodológico: ¿cómo deben justificarse los axiomas de la teoría de conjuntos? Como muchos naturalistas, busca en la historia algunas claves, realzando los "argumentos reales" ofrecidos por los que proponen los axiomas estándar. Los axiomas son aceptados en parte por "razones intrínsecas" y en parte debido a las consecuencias que producen[23]. Maddy se plantea, entonces, como objetivo aclarar los criterios que gobiernan la aceptación de nuevos axiomas y aplicarlos a aquellos enunciados que son candidatos a axiomas y cuyas virtudes suelen ser debatidas por los expertos en teoría de conjuntos. Así, lo matemáticamente creíble es aquello que resulta aceptable mediante tales criterios. En la práctica conjuntista, cualquier buena razón que cuente a favor de un axioma se considerará razón adecuada para creer que ese axioma es verdadero, y no se necesita nada más.

Pero Maddy también explora diversas formas de realismo, criticando sus propias y anteriores posiciones con gran rigor. Elabora y evalúa algunas versiones de naturalismo[24], al tiempo que esboza posibles doctrinas ontológicas. La respuesta que ofrece a su principal cuestión le lleva a identificar dos criterios para evaluar nuevos axiomas: maximizar el universo matemático y preservar un tratamiento unificador. Maddy despliega estas directrices para construir un argumento naturalista convincente contra el axioma de constructibilidad (V=L), que identifica el universo de los conjuntos con los conjuntos constructibles. Así, los estudios sobre los orígenes y el desarrollo de la teoría de conjuntos, y las posiciones filosóficas que las inspiraron, le permiten mostrar que los debates metodológicos resultantes se zanjaron sobre bases matemáticas y no filosóficas. Es decir, la justifi-

---

22 *What is Mathematics, Really?*, p. xi.

23 Cf. J. Alcolea, J. M. Lorente y J. P. Úbeda "Justificación y racionalidad de axiomas", en A. Nepomuceno et alii (eds), *Lógica, Lenguaje e Información*, Sevilla, Editorial Kronos, 2000, pp. 1-7.

24 Cf. P. Maddy, "Three Forms of Naturalism", en S. Shapiro (ed), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, cap. 13.

cación procede de los frutos matemáticos, el éxito de los métodos, no de su inspiración filosófica[25]. La historia nos enseñaría a identificar los objetivos de la práctica matemática y evaluar la racionalidad de los métodos por sus relaciones con esos objetivos. Por un lado, el modelo "naturalizado" de práctica justificativa puede contrastarse con los casos históricos en los que los debates metodológicos quedaron resueltos. Por otro, los argumentos sobre los fines y los medios pueden contrastarse por su plausibilidad desde el punto de vista de los matemáticos actuales. El modelo también puede ser considerado como una predicción de la forma en que las controversias podrían ser finalmente zanjadas. La tesis de que el modelo refleja adecuadamente la estructura justificativa subyacente de la práctica matemática queda así sujeta a confirmación o refutación de una manera naturalista y, por tanto, científica.

El naturalismo de Maddy remite, así, a la posición filosófica que toma su punto de partida desde la propia matemática, su práctica y su historia. Pero esta idea puede remontarse también a otro disidente, Ph. Kitcher, quien, en su *The Nature of Mathematical Knowledge*[26], desarrolló una epistemología y una metodología naturalistas, argumentando a favor de dos tesis: (1) la matemática es una teoría idealizadora, fruto de las operaciones constructivas ideales de agentes ideales, que se basa originalmente en la experiencia humana con los objetos materiales del mundo, y (2) la matemática actual ha evolucionado desde esta base a través de una serie de transiciones racionales interprácticas. Pero no está claro que esta concepción ofrezca alguna ventaja frente al realismo a la hora de reivindicar la racionalidad de la "transición interpráctica" que llevó, por ejemplo, a la adopción del axioma de elección[27], el cual no posee un carácter constructivo.

Ahora bien, si aceptamos la posibilidad de que las posiciones de Kitcher y Maddy son complementarias por lo que respecta a la práctica matemática —lo que es bastante verosímil en atención a las partes de la historia (cálculo y teoría de conjuntos) que cada uno ha

---

25 Resulta interesante constatar que el debate inicial sobre el axioma de elección no impulsó a los matemáticos a "profundizar sus filosofías de la matemática" (G. H. MOORE, *Zermelo's Axiom of Choice*, Berlin, Springer, 1982, p. 309)

26 PH. KITCHER, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, Oxford University Press, 1983.

27 En justicia, la dificultad no es planteada tanto por la parte más sustantiva de la filosofía de Kitcher, como por las proclamas empiristas a que recurre para promocionarla.

abordado— y si aceptamos que los criterios de procedimiento en la práctica otorgan objetividad a nuestras pretensiones de conocimiento, entonces la neutralidad metafísica puede facilitar el encuentro de concepciones. En este sentido, la posición constructivista de Kitcher sería perfectamente compatible con las inclinaciones realistas de Maddy. Es decir, trasunto de la idea kantiana de que todo conocimiento tiene su origen en la experiencia, pero no todo él procede de ella, el conocimiento matemático comenzaría con alguna de nuestras operaciones o actividades mundanas y ciertas construcciones conceptuales que, una vez vertidas al lenguaje, comenzarían un proceso de objetivización y autonomía. Este proceso es sobre todo un proceso histórico a cuyo desarrollo contribuirían todos los matemáticos implicados en una determinada práctica.

La concepción resultante[28], con elementos constructivistas y realistas, podría responder de forma natural a los problemas filosóficos de Benacerraf. Además, en ella las cuestiones matemáticas independientes, como la hipótesis del continuo, remitirían a cosas objetivamente existentes, por tanto deberían tener una respuesta determinada, para que fueran resueltas por nuevos axiomas que serían "verdaderos" o "falsos" en el mundo "real" de los objetos matemáticos. Obsérvese, no obstante, que un matemático aceptaría los axiomas, no porque sean verdaderos, sino porque tiene buenas razones para pensar que son verdaderos. ¿Cómo podría estar seguro de su verdad?[29] Lo único que puede afirmarse es que *si* los axiomas son verdaderos y las reglas de inferencia son correctas, *entonces* sus consecuencias serán verdaderas. Así, el estado de la matemática es inevitablemente hipotético, y la matemática del momento describe la re-

---

[28] Próxima a las ideas de K. R. POPPER, quien sostendría que, "aunque en su origen son construidos por nosotros", los objetos matemáticos pueden llegar a formar parte del mundo 3 (*Objective Knowledge*, Oxford, Clarendon Press, 1972, p. 138. Hay traducción de C. Solís, *Conocimiento objetivo*, Madrid, Tecnos, 1974). Cf. J. ALCOLEA y F. J. SANTONJA, "Los conceptos matemáticos en el mundo 3 de Popper", en A. MARCOS ET ALII (eds), *Actas del IV Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España (Valladolid, 3-6 de noviembre de 2004)*, Valladolid, Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España, 2004, pp. 118-120.

[29] Recordemos las limitaciones impuestas por los teoremas de Gödel. Por lo demás, un matemático como D. A. MARTIN duda de que cada uno de los axiomas sea conocido con certeza. Véase su "Mathematical Evidence", en H. G. DALES y G. OLIVERI (eds), *Truth in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1998, pp. 215-231. Sobre el problema de la verdad y la certeza, véase CAMINO CAÑÓN, "La matemática: Certeza y verdad", *Diálogo filosófico*, 6 (1990), n. 18, pp. 344-354.

alidad matemática de una manera aproximada. No hay ninguna razón para suponer que esa descripción es fidedigna. La tesis de que la matemática describe un mundo matemático objetivo debería considerarse más como una cuestión de intención que como un hecho cumplido. Más allá de los axiomas que hemos aceptado como si dieran cuenta de un análisis adecuado de nuestros conceptos matemáticos, quedan, y siempre quedarán, enunciados que no se pueden decidir a partir de ellos. Así, la matemática se torna especulativa en el sentido de que incluso las deducciones o los enunciados más elementales deben responder a una realidad que supera nuestra captación cognitiva, pero que, en el mejor de los casos, sólo podemos comprender parcialmente y sobre la que podríamos estar equivocados.

Enero 2006

Jesús Alcolea Banegas
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Valencia