El estado de la cuestión

La mediación de la *epistemología matemática* en las propuestas de *educación matemática*

Camino Cañón Loyes

Resumen

Enmarcamos los aspectos más significativos de la filosofía de la matemática de las propuestas de Educación Matemática seleccionadas en razón de su relevancia en la comunidad didáctica internacional: la escuela francesa de la *Didactique* con fuerte impacto en España, la propuesta realista *(RME)* del holandés Hans Freudenthal, el *constructivismo radical* y el *constructivismo social*. La tercera parte consiste en un balance crítico.

Abstract

We are initially presenting a theoretical framework with the most significant aspects of the Philosophy of Mathematics, which situate the proposals of Mathematical Education selected because of their relevance in the international teaching community: the French school *Didactique,* the realist proposal *(RME)* of Hans Freudhental in Holland, *radical constructivism* and *social constructivism*. The third part consists of a critical summing up.

El origen de este número de Diálogo Filosófico estuvo ligado al fallecimiento en la primavera del 2004 de un gran matemático español, Miguel de Guzmán[1]. Presentamos aquí una perspectiva de la

---

[1] Miguel de Guzmán (1936-2004). Como investigador y profesor su prestigio está vinculado al campo del análisis armónico, y últimamente a la Tª de fractales. Pero en cuanto matemático, Guzmán fue además un apasionado por abrir el acceso al mundo fascinante y rebosante de belleza y armonía que él vivía. Dedicó una buena parte de sus mejores energías en los últimos veinte años de su vida a transformar la educación matemática primero en España y América Latina, luego su acción cobró dimensiones universales como presidente de la *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI). Se han publicado varios libros homenaje, entre ellos: GÓMEZ CHACÓN, I.Mª: 2005 y MARTÍNEZ ANSELMIL, J.Mª: 2005.

mediación de la epistemología en las relaciones entre la matemática y la educación matemática, por haber sido ésta última objeto de especial dedicación del profesor Guzmán en los últimos años de su vida.

Una comunidad científica en busca de la disciplina propia

En la segunda mitad del siglo XX se produjeron cambios profundos en la consideración de la educación tanto en su incidencia en el proceso de formación de las personas, como de su lugar en la empresa colectiva del conocimiento. En el caso de la *educación matemática* (EM) estos cambios han tenido su expresión en la constitución de una nueva comunidad científica extraordinariamente activa tanto en investigación como en publicaciones y espacios en la red, que han renovado el panorama de la práctica educativa en esta área que en la tradición continental europea denominamos didáctica de la matemática[2].

La EM es fruto de una combinación de ciencias humanas, de matemática y de filosofía, y lleva consigo la dificultad inherente a la complejidad de sus mismos ingredientes.[3] La Educación Matemática es una actividad humana institucionalizada y dependiente de diversos dominios del conocimiento como son: matemáticas, psicología, sociología, historia, antropología, filosofía, que ha buscado configurarse como una disciplina, que cuenta con el conocimiento de sus fines como parte esencial, se orienta al aprendizaje de las matemáticas por parte del alumno y las condiciones para darse ese aprendizaje son parte integrante del estudio de esa nueva disciplina.

Por ello, pensar que la epistemología de la matemática ha de ser determinante en las propuestas de EM y esperar por tanto una cierta simetría entre las epistemologías de las matemáticas y de EM es una aproximación ingenua que no hace justicia a la complejidad del ca-

---

[2] En la tradición europea continental el término empleado comúnmente es 'didáctica', y así consta en los nombres de asignaturas oficiales en las universidades. En la literatura actual en diálogo con culturas de influencia anglosajona, se emplea la expresión 'educación matemática'. Opto por esta segunda porque la considero antropológicamente más expresiva y porque es la empleada en las convenciones internacionales (cfr. Documento de Discusión, ICMI, 1994, en SIERPINSKA & KILPATICK, 1998).

[3] Véase por ejemplo el estudio de RICO, L. y SIERRA, M. (2000) y el artículo de J.D. Godino en este volumen.

so. El trabajo de Sierpinska y Lerman (1996) descarta cualquier aproximación ingenua a la cuestión, y la propia Anna Sierpinska en un trabajo posterior[4] advierte de "la tendencia en EM a multiplicar y diversificar sus fundamentos epistemológicos, aproximaciones teóricas, metodologías y cuestiones de investigación", y añade que se ha convertido en norma en lugar de ser excepción el hecho de que los investigadores proponen su propio marco conceptual para la investigación, en lugar de adoptar o afinar alguno de los existentes de un modo explícito y disciplinado.

La perspectiva que aquí hemos adoptado pone de manifiesto las concepciones de la matemática y de la epistemología que subyacen a algunas de las propuestas más relevantes en Educación Matemática, y para ello comenzamos recordando de dónde venimos en esos aspectos.

Dejando atrás la herencia

Es sabido que a raíz del hallazgo de las geometrías no euclídeas en la primera mitad del XIX, se produjo una revolución epistemológica en el ámbito de las Matemáticas cuyas consecuencias llevaron a un denso período de búsqueda de fundamentos para asegurar el carácter de verdades necesarias y universales de los resultados matemáticos. El fracaso del proyecto global a través de los programas logicista primero y formalista después, fue compatible con el logro de grandes avances, e incluso los mismos resultados que dieron al traste con ellos han mostrado una fecundidad singular, como es el caso del teorema de Gödel o de las aportaciones de Frege.[5] También el programa intuicionista dejó tras de sí el camino abierto a la matemática constructiva.

El formalismo acabó por encerrar la matemática en los barrotes de oro del contexto de justificación lógica de sus resultados, y como certeramente denuncia Lakatos[6], constriñó el quehacer matemático al ámbito de la metamatemática excluyendo de ella las fases heurísti-

---

[4] Anna Sierpinska hace estos comentarios en una conferencia en sesión plenaria al congreso mundial de educación matemática, en el que analiza las tendencias en las investigaciones presentadas en encuentros mundiales a través de una muestra significativa. Ver *Proceedings CMESG/GCEDM*, 2003, pp. 11-35. La cita corresponde a la pág. 11.

[5] Véase la parte III de CAÑÓN, C. (1993).

[6] Ver el prólogo de LAKATOS, I. (1976).

cas y de lenguajes tentativos. Una expresión paradigmática de este modo de presentar las Matemáticas fue la obra colectiva francesa de Nicolas Bourbaki.[7]

La influencia del bourbakismo para la EM fue inmensa; dio origen a la *nueva matemática* o *matemática moderna* como la conocimos en la España de los sesenta. Además de la influencia ejercida en la formación de las generaciones de matemáticos de aquellos años[8], las políticas educativas aceptaron el reto y la educación matemática de los escolares estuvo regida por los principios formalistas. La teoría de conjuntos se convirtió en el sustento de toda la matemática incluídos los números. Los *números naturales,* por ejemplo, dejaron de ser 'naturales', para convertirse en los 'cardinales de conjuntos coordinables'.

La coincidencia en esta etapa del programa formalista de Bourbaki con los estudios de Piaget, que hablaba de cómo los niños llegan a saber matemáticas y no sólo de cómo se justifican las proposiciones matemáticas, dieron un soporte desde la Psicología a la presentación de las matemáticas como estructuras en el último estadio de su constitución, separando el aprendizaje de la matemática de toda apoyatura en la realidad, marginando así la dimensión visual y manipulativa y el uso de los lenguajes informales. La superación de esta etapa ha venido desde varios frentes que sintetizamos a continuación.

La crítica de Lakatos y la superación de la dicotomía de los contextos

Ante ese estado de cosas, la crítica de Lakatos a la esterilidad del formalismo[9] abrió una puerta a la Heurística al fundamentar la superación de la dicotomía de los contextos, de génesis y de justificación, de cuño neopositivista.[10] La centralidad de la relevancia de los con-

---

[7] Nicolas Bourbaki es el nombre de un colectivo de matemáticos franceses que después de la Segunda Guerra Mundial se propusieron reconstruir toda la matemática según los patrones formalistas. Jean Dieudonné es el representante del grupo que más influencia tuvo para la dimensión de EM. Ver también FREUDENTHAL, 1991, p.130ss.

[8] En España, el profesor Pedro Abellanas de la Universidad Complutense lideró el movimiento de la reforma.

[9] Ver la introducción a *Proofs and Refutations*, LAKATOS: 1976.

[10] Fue Polya quien con su pequeño libro *How to solve it?*. 1945, introdujo la relevancia de la Heurística en Educación Matemática. Y fue este autor quien le

textos en nuestra argumentación se orienta a hacer patente que la visión que se sigue de primar uno u otro, lleva consigo no sólo modos diversos de concebir la matemática, sino también modos muy distantes de introducir en su conocimiento.

En el caso de primar el contexto de justificación, como fue el caso en la cultura escolar tradicional y también durante la etapa de la matemática moderna, la concepción epistemológica predominante era la platónica en el primer caso y la formalista en el segundo. La creencia de que los resultados, los teoremas, de la matemática son verdades necesarias y universales, la aproximación a la matemática desde esos resultados y desde las demostraciones incontestables que los sustentan por la fuerza deductiva de las mismas, hacían de la matemática una disciplina rígida y ajena a los intereses y motivaciones de la mayoría de los alumnos. El papel del profesor era presentar esos resultados y propiciar que los alumnos pudieran llegar a ellos por sí mismos con el lenguaje y los métodos más formales posibles[11].

En el caso opuesto al primar el contexto de génesis, nos encontramos con una cultura matemática escolar en la que lo que cuentan son las intuiciones –ocurrencias- de los alumnos, el lenguaje tentativo, las conjeturas... Cuenta cómo motivar a los alumnos y orientar sus capacidades emocionales hacia los nuevos conocimientos. La resolución de problemas desplaza la centralidad de las demostraciones para obtener teoremas, la atención a los procesos desplaza el centramiento en los resultados y la construcción informal desplaza la lógica deductiva que liga axiomas, definiciones o teoremas previos con datos nuevos. Además, la psicología y los factores socioculturales pasan a ocupar un lugar central, no sólo reclamado por el contexto educativo, sino por la misma concepción de la matemática vista desde la perspectiva de su génesis. En el extremo, estaríamos ante una concepción naturalizada de la epistemología que se considera reducida a elementos psicosociales y culturales. La polarización en el contexto de génesis lleva a estar en consonancia con las tesis de los autores posmodernos más radicales.[12]

---

propuso a Lakatos el problema de estudio de su tesis doctoral, pieza clave para su aportación al cambio en Filosofía de la Matemática. Este pequeño libro de Polya se convirtió en un clásico para la corriente conocida como *resolución de problemas*. En España, esta corriente fue sostenida y animada en las últimas décadas por Miguel de Guzmán. Puede verse CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C.: 2000.

[11] Ver mi reflexión: *La relevancia de la epistemología para la didáctica de las Matemáticas*, en L. RUIZ HIGUERAS ed. :1996.

[12] Puede verse CAÑÓN, C.: 2004.

En consonancia con la posmodernidad

En primer lugar, yo diría que se percibe un sentimiento de "liberación" respecto de la concepción matemática platónica, proporcionado inicialmente por Lakatos, y más tarde por los posmodernos y los seguidores de la propuesta de Quine de la naturalización de la epistemología, convirtendo a ésta en una parte de las ciencias, en particular de la psicología. En el ámbito de la Filosofía de la Matemática, algunos autores defienden un punto de vista de este género[13], y en el caso de la EM la fuerza de los programas psicológicos se ha dejado sentir con mayor fuerza en las corrientes constructivista radical y constructivista social y cultural. En el primer caso, la autoridad de referencia es Piaget, en el segundo Vygotsky como veremos más adelante.

Este modo de situarse lleva a algunos a pensar la Matemática de un modo "light"situando su trabajo a la sombra de una concepción de las ciencias sociales donde no cabe hablar de verdad, donde la objetividad ha sido reemplazada por el acuerdo conversacional y donde la utilidad ha ocupado el lugar del rigor y del resultado correcto.

Ligado a lo anterior se da lo que yo llamaría *giro antropológico posmoderno*. No es el sujeto trascendental el que hace matemáticas, sino el sujeto individual; la paloma de la razón kantiana encuentra aquí una atmósfera que no es pura, se topa con fuertes rozamientos en su actividad matemática. El quehacer matemático ha perdido su estatuto singular y ha pasado a ser una actividad entre otras de la que se pueden colgar todas las flaquezas propias de la condición humana individual.

Conjugar elementos que inciden

Desde la perspectiva que nos ocupa es especialmente significativa la consideración del modo de conjugar aspectos de tres ámbitos: filosofías de la matemática, teorías del conocimiento y teorías del aprendizaje. Hay quienes priman unos aspectos sobre otros y eso da lugar a propuestas muy diversas entre sí. Priman a mi entender la filosofía de la matemática, las propuestas que dan centralidad al objeto del aprendizaje, cuál es su naturaleza, su desarrollo, etc. Sería el

[13] Entre ellos KITCHER, Ph.: 1986.

caso de la propuesta conocida como *educación matemática realista* (RME), liderada por el matemático holandés Hans Freudenthal (1905-1990) y también el de la *didactique* francesa.

Las teorías del aprendizaje presiden los edificios constructivistas, apoyados en teorías del conocimiento. La filosofía de la matemática está desarrollada convergentemente a mi juicio, de modo que los edificios constructivistas queden con suficiente apoyatura desde este ámbito teórico. Los constructivismos a que nos referimos son de dos tipos: el llamado *radical*, cuyo líder desde el punto de vista filosófico es el norteamericano Von Glasersfeld, que adopta como referente psicológico la teoría del aprendizaje de Piaget, y el *constructivismo social*, que se sustenta en las teorías del aprendizaje de Vygotsky.

Existen otras propuestas[14] y entre ellas la que desarrollan autores españoles cuya presentación es objeto de uno de los artículos del presente número de Diálogo Filosófico: "Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático", del profesor Juan Díaz Godino. En lo que sigue nos centraremos en exponer los aspectos más relevantes de las propuestas mencionadas desde la perspectiva de la mediación que la epistemología de la matemática tiene en ellas.

I.- *La Didactique*

La aparición y desarrollo de los diversos momentos de lo que podríamos llamar la escuela francesa de la *Didactique*, está descrita en numerosas publicaciones realizadas por miembros fundadores y otros miembros cualificados de la misma. A ellos nos referiremos fundamentalmente.[15]

La influencia de la *Didactique* en España ha sido y es grande. Existen actualmente varios grupos activos tanto en investigación como en programas y cátedras de formación de profesores de matemáticas.[16]

En los textos que dan cuenta del origen de esta escuela, en la mitad de los setenta, se subrayan dos objetivos que emergen de un po-

---

14 Véanse el trabajo ya citado de SIERPINSKA & LERMAN: 1996, y GODINO: 2005.

15 Entre los autores que más han contribuido a los aspectos epistemológicos de la *Didactique des Matematiques* están Brousseau, Chevallard, Balacheff, Artigue, Vergnaud, Arsac (ver Bibliografía). En GASCÓN: 1998 y 1999 hay referencias abundantes y específicas a estos autores. También hacemos uso de una presentación reciente, hecha por autores de la Universidad Nacional de Puerto Rico, de síntesis contenidas en GODINO: 2005 de algunos comentarios críticos (a SIERPINSKA & LERMAN: 1996 y a escritos y notas críticas de la profesora Luisa Ruiz Higueras de la Universidad de Jaén).

16 Véase RICO, L. y SIERRA, M.: 2000.

sicionamiento respecto del estado de la cuestión en aquel momento. Uno consiste en la necesidad de abandonar la concepción 'mágica' de la enseñanza de la matemática concebida como un arte asociado a las cualidades del alumno y del profesor; el otro, la de ofrecer alternativa a la concepción de un aprendizaje matemático, entonces en alza, centrado en el estudio de procesos psico-cognitivos implicados en la adquisición del conocimiento matemático.[17] En esta aproximación las tareas matemáticas se toman como algo dado de antemano, como si estuvieran ya descritas en tanto que tareas matemáticas, es decir, las dificultades que se evidencian sólo pueden ser consideradas como dificultades cognitivas y no como dificultades matemáticas. Este estado de cosas es considerado críticamente por los autores de esta escuela francesa de la *Didactique des Mathématiques* como un límite que es preciso superar. El primer paso fue dado por Brousseau, [18] al proponer su Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

Teoría de las situaciones didácticas

La aparición de la TSD es considerada como una revolución por ser un modo distinto y particular de cuestionar la realidad de la educación matemática. El cambio que se produce, respecto al Programa Cognitivo, radica fundamentalmente en cuestionar el "modelo epistemológico de la actividad matemática" de manera que el objeto de estudio de la didáctica hay que situarlo en el marco más amplio de las "prácticas matemáticas" que se desarrollan en el conjunto de las instituciones de la sociedad y no sólo en el contexto de las instituciones de enseñanza.

Brousseau postuló como irreductibles los fenómenos didácticos a los meros fenómenos cognitivos, sociológicos o lingüísticos que aparecen en los procesos de generación y difusión de la matemática en las instituciones sociales. Consideró que 'aprender matemáticas' y 'enseñar matemáticas' son términos derivados, siendo el término pri-

---

[17] J. GASCÓN, 1998, p. 3. La sistematización en la etapa clásica, se lleva a cabo según dos enfoques. Un enfoque es el que prima el aprendizaje del alumno y se da en torno a paradigmas de la psicología vigentes, como lo fue el del "aprendizaje significativo" (AUSUBEL, D.P.: 1968) o los de Piaget, Vygotsky y Bruner entre otros. El segundo de los enfoques, prima la actividad docente y amplía la problemática con cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional, que se concibe multidisciplinar: psicología educativa, sociología, didáctica general, historia y epistemología de las matemáticas.

[18] 1986. Véase GASCÓN, J.: 1998.

mitivo la 'situación didáctica' o conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (en el que se inscribe el profesor) con el fin de que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vía de constitución. Las matemáticas no son simplemente un sistema conceptual lógicamente consistente y productor de demostraciones, son en primer lugar una actividad que se realiza en una situación y contra un medio. El alumno aprende adaptándose a un medio de desequilibrios y en él construye su propio conocimiento, que se manifiesta en las respuestas nuevas que es capaz de dar, siendo éstas precisamente la prueba mejor del aprendizaje logrado.

En la TSD, la *situación fundamental* es el instrumento clave para caracterizar los conocimientos matemáticos. El principio fundamental de esta teoría consiste precisamente en definir un conocimiento mediante una situación, lo cual quiere decir caracterizarlo mediante un autómata que modelice los problemas que a su vez sólo pueden resolverse satisfactoriamente mediante el conocimiento en cuestión.[19] Son las *restricciones de esta situación*, las que acaban definiendo el conocimiento que está en juego y, por tanto, el profesor tiene la capacidad para diseñar situaciones creando ciertas restricciones artificiales que provoquen en los estudiantes la construcción de un cierto tipo de conocimiento.

Así, la TSD describe la matemática escolar en términos de situaciones y la actividad matemática escolar consiste principalmente en 'habérselas con problemas' en un sentido amplio. Serán situaciones donde el alumno desarrolle un trabajo intelectual de algún modo comparable a la actividad científica en cuanto tal, pues formula, prueba, construye modelos, conceptos, teorías. Son situaciones de creación, y no de redescubrimiento.

---

[19] Construir una situación fundamental, para que a través de la operación de contar determinemos el cardinal de una colección, supone definir una clase de situaciones con un cierto número de variables didácticas que, al tomar diferentes valores, permita generar un conjunto de problemas característicos del contar. Serán problemas donde el contar constituya su solución óptima y que debe resolver alguien que no posee este conocimiento, es decir, que no sabe contar. Por ejemplo: dada una cierta cantidad de botes de pintura, pedimos a un niño que vaya a otro lugar donde hay pinceles y desde el que no ve los botes, y que en un solo viaje traiga los pinceles que necesite para poner uno en cada bote. Alguien sabe contar si realiza correctamente esta tarea. Puede verse desarrollado este ejemplo en las notas de clase de la citada profesora Luisa Ruiz Higueras.

El diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado se orienta a la construcción de su génesis artificial, de modo que simule los diferentes aspectos del concepto y que, sin reproducir el proceso histórico, conduzca a resultados similares. Por ello propone que la investigación sobre un concepto dado incluya un estudio epistemológico que tome en consideración además de su significado en las teorías actuales, las condiciones históricas y culturales en que emergió el concepto, sus concepciones asociadas, los problemas que ha permitido resolver, los procesos de modelización que genera, su epistemología genética y su análisis didáctico en el pasado y en el presente. Este trabajo epistemológico busca las *razones de ser* de los conocimientos matemáticos: ¿Qué problemas permiten resolver? ¿Cómo surgieron? ¿Por qué? ¿Bajo qué condiciones? ¿Qué definición es la "mejor" para dar sentido, por ejemplo, a las operaciones entre fracciones? ¿Qué dificultades comporta cada una de estas decisiones y cómo se pueden paliar?, etc. Numerosas investigaciones[20] han puesto de manifiesto que estas cuestiones sólo se pueden abordar y responder de manera eficaz si, saliendo del nivel puntual en el que se plantean, se reformulan como aspectos de problemas didácticos más amplios. Siguiendo con el ejemplo de las operaciones entre fracciones, preguntarse por la razón de ser de la reconstrucción escolar de los racionales, es decir, por qué y cuándo son necesarios estos números, es preguntarse también por la relación entre el sistema de numeración y la medida de magnitudes y, de manera más amplia, por la relación entre las matemáticas y el mundo extramatemático que las matemáticas pretenden modelizar. Todos estos estudios constituyen herramientas muy pertinentes en la búsqueda de sentido y significación de los conocimientos matemáticos, con la exigencia de que las situaciones que construya el didacta puedan vivir en el medio escolar que impone restricciones fuertes.

Teoría de la transposición didáctica (TTD)

En el marco de la Didáctica Fundamental, se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas cuyo origen hay que buscarlo en la misma génesis y desarrollo del saber matemático.

---

[20] Sin duda el trabajo más completo sobre la didáctica de los números decimales es el que dirigió Guy Brousseau a principios de los 80. Para una recopilación de estos trabajos, ver Brousseau (1998).

Todas las actividades matemáticas tienen lugar en el seno de una institución determinada, su forma de existencia y su evolución dependen principalmente de *restricciones* de tipo educativo relacionadas con el proceso, que Chevallard llamará de *transposición didáctica*. Ésta consiste en los cambios y transposiciones que conlleva un conocimiento matemático para ser enseñado en el aula.[21]

Para entender adecuadamente el tipo de matemática que se hace en la escuela, necesitamos conocer también otros tipos de actividades matemáticas llevadas a cabo en otras instituciones, que son en buena medida las que justifican el proceso de enseñanza/aprendizaje de las mismas. De este modo resulta que el fenómeno didáctico aparece como inseparable no sólo de los fenómenos de producción sino también de los de uso de la matemática, ya analizados por la TSD, y otros como los relativos a la transmisión de los conocimientos matemáticos y todos los que se refieren a la "vida de éstos" en una institución escolar. Entre estos últimos están, por ejemplo, las restricciones de evaluabilidad, temporalidad, atomización, etc. Las actividades didácticas de la escuela son así integradas en un dominio más amplio: el de las prácticas matemáticas institucionalizadas. Así el conocimiento matemático producido por los investigadores de la comunidad matemática como institución productora, no es idéntico al que ha de ser enseñado, que es fijado por el sistema educativo. A su vez el conocimiento matemático que realmente se enseña hay que enmarcarlo en la institución *aula*, y el conocimiento matemático aprendido por los estudiantes puede todavía situarse todavía en una institución más amplia: la *comunidad de estudio*.

Entre los supuestos epistemológicos de esta propuesta está la consideración del "savoir savant mathématique" [22] como algo dotado de una cierta existencia objetiva con lo que contrastar el aprendizaje de los alumnos. En este punto, la escuela francesa de la *didactique* se distancia claramente de las propuestas del constructivismo para el que no existe esa especie de mundo-3 popperiano de saber

[21] Una concreción de este modo de trabajo lo he encontrado en la contribución de los profesores Luisa Ruiz Higueras y José Luis Rodríguez Fernández sobre "Fenómenos didácticos asociados al proceso de transposición didáctica de la noción de función en Enseñanza Secundaria", desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación PS-94-0217, aprobado y financiado por la DGICYT del MEC de España. En él estudian las transformaciones que experimenta la noción de función como objeto matemático para ser introducido en la ESO. Ver también el estudio de RUIZ HIGERAS, L.: 1998, sobre el concepto de función.

[22] cfr. CHEVALLARD: 1985.

objetivo. Tanto en la TD como en la TAD se elabora y se trabaja un modelo epistemológico de referencia siempre provisional, son hipótesis de trabajo que como tales son constantemente revisadas y contrastadas. El nombre de "epistemología experimental" que dio inicialmente Brousseau a la Didáctica de la Matemática tiene aquí pleno sentido. Por ejemplo, para estudiar cómo se interpretan los *números decimales* en un determinado sistema de enseñanza, se precisa partir de un modelo epistemológico específico para este ámbito que funciona como un sistema de referencia en coherencia con un cierto modelo general del saber matemático.

Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD)

Los trabajos realizados por los diferentes integrantes de esta escuela, evidencian una evolución en el alcance que dan a la *didáctica de las matemáticas*. Inicialmente Brousseau consideró, como ya indicamos, que su objeto de estudio eran las actividades orientadas a la enseñanza de lo que es específico de las matemáticas. En un segundo momento, el propio Brousseau considera la didáctica de las matemáticas como la ciencia de las condiciones específicas de difusión de los saberes matemáticos, y todavía en un momento ulterior se la sitúa como una ciencia de las condiciones de la producción y difusión de un saber que es útil a la sociedad y a las necesidades del hombre. En la actualidad se la posiciona en el campo de la antropología de los saberes como *teoría antropológica de la didáctica*, y adopta una aproximación cercana a la propuesta por Mary Douglas en su libro: *How Institutions Think* (1986)[23].

Desde el punto de vista epistemológico, la TAD estudia el fenómeno del conocimiento matemático bajo el ángulo de las condiciones que hacen posible su producción y desarrollo en instituciones sociales. [24] Se retoma desde esta perspectiva la idea de Brousseau, consistente en ver la didáctica de la matemática como una ciencia de las condiciones específicas para la difusión intencional del conocimiento matemático útil para los seres humanos y para las instituciones en las que viven.

Consecuentemente, el principal objeto de investigación de esta teoría pasa de ser el conocimiento matemático generado por los matemáticos o transmitido/aprendido por los estudiantes, a ser el cono-

---

[23] Cfr. BOSCH, CHEVALLARD y GASCÓN: 2005.
[24]

cimiento matemático en tanto que reconocido como tal por las instituciones donde ese conocimiento se comunica o se aplica. De este modo uno conoce no en un sentido absoluto sino relativo a una institución. En esto consiste el supuesto conocido como de la *relatividad institucional del conocimiento.* [25]

La TAD propone la descripción del conocimiento matemático en términos de lo que denominan *praxeologías*[26], consistentes en cuatro elementos: *tipos de problemas, técnicas usadas para resolverlos, tecnologías y teorías.* Los dos últimos constituyen el *logos* o discurso razonado sobre las tareas de resolución de problemas y de las técnicas empleadas en hacerlo. Este discurso integra tanto el discurso tecnológico como el teórico usados para describir, explicar y justificar dichos elementos. Las *praxeologías* pueden ser usadas para describir tanto el conocimiento matemático como la práctica matemática, y en el segundo caso estaríamos ante *praxeologías didácticas.*[27]

Valoración crítica

1.- Quizás lo primero que hay que valorar positivamente es el gran esfuerzo intelectual y profesional de quienes se han introducido en este programa de investigación de corte lakatosiano con el objetivo de construir la *Didáctica de las Matemáticas* como una disciplina autónoma sustentada directamente en el saber matemático y no en las otras disciplinas que convergen en la DM como saber interdisciplinar. La superación de la psicología como *el* fundamento epistemológico de la DM buscada intencionalmente es un logro importante. Quizás, como apunta Godino, permanezca el desafío de lograr "un equilibrio mayor entre lo individual, lo institucional y lo social"[28] y –añadimos– los factores culturales que configuran las identidades de los alumnos.

2.- Esta escuela ha sabido integrar armónicamente diversas teorías que han surgido en su desarrollo como aportaciones de algunos de sus líderes en momentos sucesivos: TSD, TTD, TAD[29]. Cada paso

---

[25] Véase ARSAC: 1992 y BOSCH, CHEVALLARD y GASCÓN: 2005.

[26] En publicaciones anteriores (cfr. GASCÓN: 1998) aparece el término 'obra'- caracterizado por los mismos cuatro elementos que aquí distinguen a la noción de 'praxeología'(cfr. BOSCH, CHEVALLARD y GASCÓN: 2005).

[27] BOSCH Y GASCÓN: 2004.

[28] GODINO: 2005.

[29] Cf. GODINO ET AL.: "Sociedad, Escuela y Matemáticas: las aportaciones de la TAD", ponencia presentada en el I Congreso Internacional sobre la Teoría

aporta elementos de esclarecimiento y distinciones significativas, como hemos expuesto.

Pero esta realidad positiva tiene también un lado oscuro, que aquí consiste, a mi juicio, en el efecto que la complejidad teórica creciente de las nuevas propuestas puede tener en el profesor. Las distinciones teóricas pueden crecer exponencialmente, pero al ser una disciplina orientada a una acción tiene el riesgo de que el profesor que se forme según en esta escuela quede atrapado en su deseo de manejar con precisión el bagaje didáctico, de manera que someta la interacción con los alumnos en sus procesos individuales de aprendizaje a una hermenéutica rígida marcada por aquellas distinciones.

3.-También merece un comentario crítico el supuesto llamado de la *relatividad institucional del conocimiento*, mencionado anteriormente.

Desde una perspectiva de la teoría de la cultura este supuesto resulta trivial. Cada institución está configura por una cultura y consiguientemente el conocimiento que en ella se produce será relativo a ella. Sin embargo, en el caso que nos ocupa cabe preguntarse si es la cultura la que determina el conocimiento matemático que en ella se produce, o más bien el conocimiento matemático no hace sino adaptarse a ella pero la trasciende. El cálculo infinitesimal de Newton y el de Leibniz fueron creados en contextos culturales muy distintos, y sin embargo, con el reconocimiento de las diferencias en el ropaje de ambos, se les reconoce como una misma realidad matemática. Diríamos que el contenido fuerte del conocimiento no es relativo a la institución que lo produce, aunque sí lo sean muchos factores relevantes a la hora de comunicarlo o aplicarlo. Pero como aquí no estamos tratando del contexto de producción del conocimiento, sino del contexto de enseñanza/aprendizaje del mismo, estaríamos hablando de un relativismo propio de las restricciones que conllevan los procesos didácticos de adaptación escolar de ese conocimiento matemático.

Antropológica de lo Didáctico. En una versión ampliada e inédita de esta ponencia, “Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición en instrucción matemática”, se relacionan las teorías del programa epistemológico TSD y la TAD y la teoría conocida como Dialéctica Instrumento/Objeto (DIO, DOUADY: 1986) con teorías enmarcadas en el paradigma cognitivo como la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, VERGNAUD: 1990) que tiene a la vez elementos del programa epistemológico, y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (RRS, DUVAL: 1995). La teoría que el propio Godino expone en este número de Diálogo Filosófico, el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) sirve de marco de referencia para el análisis de las comparaciones.

La relatividad institucional en este sentido es consistente con uno de los supuestos previos y básicos de esta escuela: la existencia del "savoir savant matématique". A él nos hemos referido en la presentación. La existencia de este saber que actúa como referente y elemento de convergencia de lo que se enseña y de lo que debe aprenderse, elimina cualquier pretensión de relatividad institucional que no sea del carácter descrito. Parece que el rasgo posmoderno de un relativismo institucional de carácter fuerte resulta incompatible con los caracteres que la trayectoria de la *Didactique* ha otorgado a la matemática, que son fuertemente deudores de la modernidad.

Para concluir diremos que en el caso de la *Didactique*, el lugar de la epistemología matemática ha sido tan central que más que de mediación se puede hablar de hegemonía. La epistemología es considerada como el lugar teórico desde el que lograr una alternativa a las propuestas sustentadas en paradigmas de la Psicología. El conocimiento matemático pasa a ser el foco desde donde se ilumina el proceso enseñanza/aprendizaje, de modo que al hacerlo se pretende establecer un continuo entre los contextos clásicos de génesis y de justificación, con los actualmente nombrados como contextos de enseñanza/aprendizaje y aplicación.[30] Indicadores de la fecundidad son las abundantes investigaciones específicas en epistemología de conceptos y dominios estrictamente matemáticos y la experiencia acumulada de un éxito académico en la formación de profesores de matemáticas.

II.-La propuesta didáctica de Freudenthal: Educación matemática realista (RME)

Entre las propuestas significativas que hemos destacado está la promovida por Hans Freudenthal (1905-1990) en Holanda, liderada ahora por el *Freudenhtal Institute*. El trabajo está especialmente orientado a la educación primaria y a los niveles iniciales de educación secundaria.[31] La filosofía de la educación matemática que subyace a las propuestas didácticas del instituto es conocida como Realistic Mathematics Education (RME) y está basada en las ideas desarrolladas por Freudenthal por algunos miembros destacados de este movimiento.

---

[30] Puede verse el desarrollo de estos cuatro contextos en ECHEVARRÍA, J.: 1995.

[31] Puede verse el Report on a visit to Freudenthal Institute, realizado por Bastiaan J. Braams en 2001: http://www.math.nyu.edu/mfdd/braams/links/fi-visit.html.

La aportación de Freudenthal a la EM está basada en un profundo conocimiento de la matemática, de su historia y de sus aplicaciones, así como de una fina observación tanto de las propuestas didácticas existentes como de los procesos de aprendizaje de los mismos niños y también de un conocimiento de autores y corrientes filosóficas de las que extrae su propia propuesta epistemológica. Conoce las teorías psicológicas al uso, pero no son ellas la fuente de inspiración ni basa en ellas la justificación de sus propuestas.[32]

La relevancia de la dimensión filosófica en esta propuesta didáctica se hace patente en su crítica a Piaget, cuya obra valora en muchos aspectos, al declarar insuficiente la epistemología genética como fundamento de su propuesta por carecer en su base de lo que él denomina *fenomenología matemática* (fm).[33] Veamos el alcance del uso del término 'fenomenología'.

Fenomenología

Teniendo este término un lugar muy significativo en la filosofía y especialmente en la filosofía del XX, el mismo Freudenthal se adelanta a decir: "Yo no uso 'fenomenología' en el sentido en que puede extraerse de los trabajos de Hegel, Husserl o Heidegger"[34]. Podemos acercarnos a su propuesta de dos modos complementarios empleados por él respectivamente en cada una de las publicaciones a las que nos hemos referido.

---

32 Él mismo lo expresa así: "¿Dónde busco el material requerido para mi fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas? Difícilmente me apoyo en el trabajo de otros. Me he apoyado en mi conocimiento de las matemáticas, sus aplicaciones y su historia. Sé cómo las ideas matemáticas han llegado a ser o podrían haber llegado a ser entidades matemáticas. A partir del análisis de los libros de texto sé como los didactas juzgan que pueden apoyar el desarrollo de tales ideas en las mentes de los que aprenden. Finalmente observo los procesos de aprendizaje por los que yo mismo he llegado a comprender un poco del proceso concreto de constitución de las estructuras matemáticas y del logro de los conceptos matemáticos (attainment). Muestro esto con ejemplos" (1983, p. 29).

33 Considera además la *fenomenología didáctica* (fd) y la *fenomenología genética* (fg). En el caso de la fm se trabaja con una estructura matemática como un *producto* cognitivo en el modo en que describe sus objetos, sean matemáticos o sean de la realidad y vida cotidiana. En el segundo caso, se trabaja con ella como una cuestión de aprender y enseñar, esto es como un *proceso* cognitivo. Y cabe pensar en un estadio anterior: una fenomenología genética de las estructuras matemáticas que las estudia en el proceso cognitivo del desarrollo mental (fg).

34 O.c.,1983, p. 28.

En primer lugar, en 1983, propone como mejor aproximación para comprender en qué consiste su fenomenología desvelar mediante ejemplos en qué consiste. Comienza con el ejemplo de la magnitud *longitud*: su modo de aparecer en situaciones concretas, las relaciones con otras magnitudes cercanas como *peso*, su simbolización, cómo reclama de forma natural el tratamiento de la relación de orden, de las operaciones básicas de suma y producto, los números racionales y los reales para poder expresar la medida. Así la longitud aparece como una función de objetos concretos. Estos pasos constituyen el primer estadio, el de la *fm* que se orienta a crear el marco de conceptos y de términos en los que se apoya la *fd*.

La *fd*, en este primer nivel de explicitación, la presenta haciendo notar cómo se introduce en el desarrollo de los objetos mentales y con ellos los conceptos y las relaciones en el aprendizaje. Para ello se detiene en aspectos como el papel que desempeñan los adjetivos en este proceso, en este caso: largo, corto, ancho, estrecho... Es decir, lo que la *fd* hace es comenzar por los fenómenos que de alguna manera son susceptibles de ser organizados, y a partir de ahí enseñar al que aprende a manipular los medios disponibles para organizarlos. De este modo la *fd* está llamada a desarrollar planes que posibiliten esta aproximación.

Se diría que Freudenthal busca inspiración en algunas páginas de la *Crítica de la razón Pura* de Kant, para acuñar los conceptos centrales de su propuesta, pero adaptándolos libremente a su modo personal de ver la Matemática y en particular la relación de ésta con la realidad y con el conocimiento. El mismo empleo de los términos 'fenómeno' y 'noúmeno' en una acepción propia puede equivocar al lector[35].

Concepción de la matemática de Freudenthal

La concepción de las matemáticas que subyace a la propuesta didáctica de Freudenthal la explicita él mismo en sus *Lecciones Chi-*

[35] Los objetos matemáticos son *nooumenon*, es decir medios racionales de organización del fenómeno. Pero una pieza de matemáticas puede ser experimentada como un *phainomenon*; los números son *nooumenon*, pero trabajar con números puede ser un *phainomenon*. Los conceptos matemáticos, las estructuras y las ideas, sirven para organizar fenómenos tanto del mundo concreto como de las mismas matemáticas. Las figuras de la geometría organizan el espacio, los números los fenómenos de la cantidad. Luis Puig : 1997, sustituye justificadamente 'noomenon' por 'medio de organización'.

nas. Es un realismo sustentado en un sentido común cuidadosamente caracterizado.

Lo que se suele llamar 'la cuestión del origen' de las matemáticas y que está en la base de las diferencias de las distintas concepciones, Freudenthal la aborda de un modo realista. El origen hay que buscarlo en los procesos colectivos de aprendizaje en los que el individuo siente como 'naturales' las reglas que le producen certeza y seguridad. Entre las matemáticas con raíces en el sentido común señala el autor como ejemplo más sobresaliente los números enteros. La integración existente entre el lenguaje común y la aritmética refleja, a su vez, este desarrollo espontáneo de las matemáticas enraizado en las prácticas del sentido común. Los niños adquieren el número en el fluir de sus actividades físicas y mentales hasta el punto de hacer difícil a los investigadores dar cuenta de cómo sucede en detalle.[36] Sobre esas reglas iniciales desarrollan nuevas reglas que se sitúan jerárquicamente en un nivel superior, generando así estructuras que reflejan la relación entre forma y contenido.

Las Matemáticas comienzan y permanecen en la realidad expresada en el sentido común de cada tiempo, el del origen de sus objetos y el contemporáneo de quienes se inician en su aprendizaje. Realidad entendida como un tejido donde no cabe discriminar las impresiones sensoriales de las interpretaciones de los mismos. Freudenthal dice expresamente que lo real "no debe ser entendido ontológicamente, (cualquiera sea el significado de ontológico), por tanto ni metafísicamente (Platón), ni físicamente (Aristóteles); ni siquiera psicológicamente, sino con la acepción del sentido común, como cuando uno usa el término de modo no reflexivo".[37]

Junto con la cuestión del origen hay que destacar la caracterización de la matemática como *actividad.* Contempla la matemática de

---

36 Critica el autor la no correspondencia del título del libro de PIAGET, J., *La génesis del número en el niño*: 1941, con su contenido. Dice que la cuestión de la génesis la desarrolló Piaget en sus primeros escritos, pero más tarde adopta una aproximación epistemológica y no genética. Explica esto diciendo que mientras Euclides adoptó la aproximación del sentido común para los números, éste fue abandonado por aproximaciones sofisticadas para evitar las paradojas. Piaget adopta ya estas versiones sofisticadas, en concreto la de Frege-Russell pasada por Bourbaki. Es decir, la episteme de Piaget adopta el estadio del conocimiento en la última etapa conocida por él, y esto en opinión de Freudenthal está lejos de trazar la génesis del número en el niño. En otro lugar dirá que trata de conceptos y no de objetos mentales que son los acreedores de la aproximación genética.

37 O.c., 1991, p. 17.

modo dinámico dentro del gran proceso de desarrollo del conocimiento de la humanidad. Un proceso en el que esa realidad del sentido común logrado en cada tiempo, encuentra expresiones en reglas, en estructuras, que se convierten a su vez en materia base para momentos de abstracción superiores generando esa jerarquía que se distancia de ese sentido común originario hasta llegar a convertirse en la realidad más alejada de él. Esta actividad está realizada por individuos concretos, y es una actividad mental específica y distinta de la que realizan cuando pretenden lograr otras formas de conocimiento como las que proporcionan las ciencias de la naturaleza o las ciencias sociales.

La actividad matemática se inicia pues en procesos de matematización de lo real. El autor acude a la historia para diferenciar los momentos en que los *modelos matemáticos* aplicados al conocimiento y transformación de la naturaleza, han respondido al sentido común primero y a teorías complejas después. La creencia platónica común de que el movimiento de los cuerpos celestes era circular o la creencia aristotélica de que el movimiento uniforme era el ideal son la base para asentar indagaciones sobre estos modelos ideales. La constatación de perturbaciones lleva a *modelizar* por aproximaciones sucesivas, que dan cuenta lo más exactamente posible del fenómeno en estudio, siendo el modelo una mediación entre teoría y realidad[38].

El lenguaje es un elemento de importancia capital en los procesos propios de la actividad matemática. Tomemos los números enteros como ejemplo de integración del lenguaje común con el lenguaje aritmético. Los símbolos para los números están integrados en el lenguaje escrito y es en este ámbito donde el símbolo adquiere realidad por sí mismo, una realidad aparentemente independiente de su creador, quien a su vez trata de reorganizar su creación generando una jerarquía fenomenológica, y por medio de ella, organizar también su entorno, empleando el instrumento matemático para el conocimiento del mismo. *Estructurar* es un medio de organizar fenómenos físicos y matemáticos e incluso de la matemática como un todo, siendo la *estructura* la forma abstraída de su expresión lingüística.

El número es un buen ejemplo para poner de manifiesto la tensión entre objeto mental y concepto. En esta dinámica el lenguaje

---

38 "Según mi terminología un modelo es solamente el intermediario –a veces indispensable– por el cual una realidad compleja o una teoría es idealizada o simplificada en orden a llegar a ser accesible a un tratamiento formal matemático" (1991, p. 34).

juega un papel importante, pues mientras que el primero busca sólo la expresión lingüística para cobrar objetividad, el segundo requiere que esa expresión tenga el rigor máximo. Las numerosas definiciones que caracterizaron el concepto de número a finales del XIX son un buen ejemplo de ello.[39]

La importancia del lenguaje en el desarrollo de estos procesos mentales ha llevado a veces a considerar que estos son secundarios y que la matemática puede ser reducida a lenguaje. Los números proporcionan de nuevo a Freudenthal un buen ejemplo para comprender donde radica este error, que para él está en el hecho de que el isomorfismo existente entre el objeto mental número y el numeral que lo representa lingüísticamente se ignora como tal y se pasa a la identificación del número con el numeral.

Esta concepción de la matemática, de su desarrollo y de los procesos que en ella tienen lugar proporcionan una base de sustentación para los principios didácticos que Freudenthal propone, completados como él mismo dice en su observación de lo que hacen los didactas y en su propia experiencia como matemático.

Principios didácticos

Son tres los principios didácticos que el autor propone: la *reinvención guiada*, los *nexos con la realidad* y el tratamiento del *aprendizaje como proceso de procesos.* Sin embargo, en sus escritos aparece reiteradamente otro principio que denominaré *orden en el aprendizaje.* Veamos sucintamente lo que significa cada uno de ellos.

1.- Freudenthal dice preferir la *reinvención guiada* a principios de otras propuestas didácticas vigentes, como *resolución de problemas, heurística* o *método genético*, por dos razones. Por una parte, posibilita a quien aprende encontrar su propio nivel explorando los caminos con toda la ayuda que necesite, la mucha o la poca que cada caso requiera. Por otra, el descubrimiento personal refuerza la motivación y genera una actitud positiva hacia la matemática en tanto que actividad humana, pues a ella se orienta la guía.[40]

---

39 Véase la presentación que hace Frege de los diversos conceptos de número en FREGE, G.:1884.

40 En palabras de Freudenthal: "el que aprende debería reinventar el matematizar mas que la matemática, el abstraer más que la abstracción, el esquematizar más que los esquemas, el formalizar mas bien que las fórmulas, el algoritmizar más que los algoritmos, el verbalizar más que el lenguaje" (1991, p. 49).

2.- Matematizar es un ejercicio de generar nexos con la realidad, y es a través de esos procesos como ha emergido la matemática. Cuando describimos nuestro mundo, tanto físico como social, el lenguaje incorpora tantos términos matemáticos que se nos hace difícil reconocerlos como tales. Hay mucha matemática absorbida en el sentido común.

Una de las actividades didácticas fundamentales del profesor es identificar contextos, es decir dominios de la realidad, que se desvelen ante el que aprende como susceptibles de ser matematizados. Debe dejarse al alumno el matematizar las situaciones-problema en la naturaleza o en la sociedad, pues al hacerlo, al reinventarlo, queda superado el dualismo de matemática y matemática aplicada. Evitar esta dualidad en los procesos de aprendizaje es un objetivo de nuestro autor en el tratamiento de los nexos entre matemáticas y realidad.

3.- Para Freudenthal considerar el aprendizaje como proceso de procesos es un principio didáctico. Los procesos y la observación de los mismos no son meramente instrumentos o materias de investigación. Distingue entre procesos de corta y de larga duración. En el caso de estos últimos se puede orientar al alumno hacia la adquisición de la actitud matemática, pues permiten guiar la reinvención con acciones como: aprender a olvidar, a recordar, a reconocer "insigts", a entrenarse en desarrollar experimentos mentales, a reflexionar sobre el proceso mismo.

4.- Hay un orden a tener en cuenta para un mejor aprendizaje, y es el inverso al que proponen los que empiezan dando conceptos y estructuras y buscando luego ejemplos que los concreticen. Se deben buscar primero los fenómenos que llevan casi forzosamente al que aprende a *constituir los objetos mentales* que son matematizados por un concepto determinado.[41] El objetivo final del proceso enseñanza/aprendizaje son los *objetos mentales*, expresión que le satisface porque puede extrapolarse a *operaciones mentales.* [42] El conocimiento no empieza por los conceptos sino al revés, éstos son el resultado del proceso cognitivo; por ejemplo, número está generado por un proceso, el de contar, y no por una definición explícita.

---

[41] Cfr. o.c. 1983, pp. 32-33.

[42] Alude al largo camino recorrido por el concepto de función del que disponemos actualmente, indicando cómo el uso del término 'función'en Leibniz y Bernoulli no tenía más referente que un objeto mental (1991, p. 19). Sobre el largo proceso de constitución del concepto de función puede verse el Apéndice al capítulo segundo de la parte II, en CAÑÓN , C.: 1993.

Para concluir

La propuesta fenomenológica presenta dificultades específicas cuando se trata de introducir en procesos matemáticos en los que interviene el infinito, pues las representaciones mentales no alcanzan al fenómeno del infinito. Ya Leibniz acudió a la aplicación de principios metafísicos para justificar su tratamiento del infinito. Luis Puig se hace eco de esta dificultad y apunta que "lo que la didáctica debe hacer es organizar un campo de experiencias que abarque el mayor número de fenómenos en cuestión y organizar la instrucción de modo que pueda constituirse un objeto mental con el cual se sea capaz de tratar con estos fenómenos".[43]

La propuesta didáctica de Freudenthal expresa sus convicciones acerca del papel formador de la Educación Matemática. Para este autor, el modo de proponer el aprendizaje de la matemática no es ajena a la imagen que cada cual tenga de la sociedad y de su jerarquía, pues al hacerlo está poniendo de manifiesto cómo espera cada cual que la matemática contribuya a los beneficios mutuos entre la sociedad y sus miembros y cómo valora a las mismas personas. Pues esta valoración determina los modos como esperamos que aprendan matemáticas los niños: libremente o esclavizados, guiados u obligados. La matemática, su enseñanza y su aprendizaje, no son separables de la posición antropológica y ética de quienes llevan a cabo las diversas tareas que las hacen realidad, a la vez con esas tareas se contribuye a la formación de un tipo de sujetos y de sociedad determinados.

III.-Constructivismos

Entre las epistemologías con mayor éxito que alimentan las propuestas de EM están los constructivismos, un plural complejo que trataremos de desentrañar. Bajo este nombre cabe un número casi ilimitado de propuestas –"en la casa de Kant hay muchas moradas".[44] En el caso de la educación matemática el término remite a dos grandes corrientes sustentadas cada una de ellas en un referente psicológico propio: el *constructivismo radical* remite a Piaget, el *constructivismo social* a Vygotsky. Presentaremos ambas a continuación.

---

43 Puig, L.: 1997, p. 87.
44 Expresión usada por Hacking, I.: 1998.

Constructivismo radical

El paradigma psicológico imperante cuando Piaget inició su trabajo era el conductismo. Piaget introduce el sujeto activo entre el estímulo y la respuesta, pues para él aprender es un proceso de continua reorganización cognitiva. Para Piaget la organización es siempre el resultado de una interacción necesaria entre la inteligencia consciente y el ambiente, caracterizándola como "adaptación".

Las ideas de Piaget son el fundamento de la teoría del *constructivismo radical*, que ha hecho suyo el argumento piagetiano de que la función cognitiva es adaptativa en el sentido biológico del término, y lo ha colocado como eje de sustentación de sus propuestas.[45] Lo epistemológicamente decisivo es cómo *encaja* el marco conceptual de un individuo con sus experiencias, y no el objetivo de lograr una correspondencia con el mundo. El autor norteamericano Von Glasersfeld es la autoridad reconocida como intérprete teórico de esta propuesta[46] cuya fundamentación ha expuesto en varios lugares y sucintamente presentamos a continuación.[47]

"Los dioses poseen la certeza, pero a nosotros como hombres nos ha sido dado sólo conjeturar". Esta cita de Alcmeón usada por Von Glasersfeld tiene fuertes resonancias en el ámbito de la epistemología de la Matemática, pues fue tomada por Lakatos como expresión de su programa falibilista. Von Glasersfeld la usa para el ámbito más amplio de la teoría del conocimiento y con ella anuncia el distanciamiento respecto de cualquier teoría del conocimiento de carácter representacional,[48] de manera que el conocimiento no se refiere,

---

[45] PIAGET, J.: 1937, en VON GLASERSFELD: 1991, p.16.

[46] Así es reconocido tanto por los autores que se encuadran en esta propuesta, como por sus críticos –Freudenthal entre ellos–, y por quienes como SIERPINSKCA y LERMAN (1996) o ERNEST, P. (1998) presentan las aportaciones del constructivismo y sus límites.

[47] Pueden verse entre otros VON GLASERSFELD: 1981. Hay versión inglesa elaborada por el propio autor en 1984 y traducción española de 1993; Von Glasersfeld: 1985, accesible en http://www.oikos.org/constructivism.htm. Entre los autores sobre los que se asienta la propuesta están los estoicos, Vico, Hume y Kant, y algunos contemporáneos como Piaget, Ceccato y Maturana. Von Glasersfeld se manifiesta en continuidad con representantes del pragmatismo como Dewey, se considera discípulo de Feyerabend y sus tesis principales no serían criticadas por autores posmodernos como Rorty.

[48] "...el constructivismo que yo represento, se aparta *radicalmente* de los demás *ismos* del mundo conceptual tradicional. La diferencia radical está en la relación entre saber y realidad. Mientras la concepción tradicional de la teoría del conocimiento, así como de la psicología cognitiva, considera esta relación

pues, a una realidad ontológica objetiva, sino al ordenamiento y organización de un mundo constituido por nuestras experiencias.

El constructivismo radical quiere dar respuesta a la cuestión kantiana de que nuestra experiencia no puede enseñarnos nada sobre la naturaleza de las cosas en sí. La respuesta la encuentra incoada en la obra de Giambattista Vico (1710), *De Antiquissima Italorum Sapientia*: solamente Dios sabe cómo es el mundo verdadero, pues es su creación y conoce, por tanto, los planes y los materiales con que fue hecho; del mismo modo, nosotros sólo podemos saber aquello que construimos.

Considera que la epistemología es "un estudio de cómo opera la inteligencia, de los caminos y medios que emplea para construir un mundo relativamente regular a partir del fluir de su experiencia".[49] Por eso llama *operar* a la actividad que construye el conocimiento, y se trata del operar de esa instancia cognitiva que como bien dice Piaget, al organizarse a sí misma, organiza su mundo experiencial. La cuestión de por qué no podemos construir la realidad al modo que nosotros queremos es contestada aplicando el *principio de viabilidad*, es decir que cualquier construcción, sea de carácter físico, sea de carácter conceptual, está sujeta a restricciones. Por ejemplo respetar el principio de no contradicción forma parte del *juego racional*.

Todo constructivismo comienza con el supuesto de que la actividad cognoscitiva ocurre en el mundo de la experiencia de una conciencia que tiende a un fin. Pero ese carácter teleológico nada tiene que ver con la teleología de una "realidad exterior", nada tiene que ver con la teleología aristotélica. El *telos* de que aquí se habla tiene sólo que ver con que un organismo vivo evalúa sus vivencias y al hacerlo tiende a que unas se repitan y otras sean evitadas. Esto lleva a su vez consigo la creencia en la regularidad (Hume) y con ella en la posibilidad de la inducción como propia de todo ser viviente.

Estos principios son incompatibles con las nociones de conocimiento, verdad y objetividad tradicionales, y requieren una reconstrucción radical de la propia noción de realidad. En síntesis, lo que vivimos y experimentamos, lo que conocemos y llegamos a saber, está necesariamente construido con nuestros propios materiales y sólo se puede explicar por la manera y la forma de haber sido construidos. El *constructivismo radical* aspira a proponer un modelo que útil.

---

siempre como un acuerdo o correspondencia gráfica (o icónica), el constructivismo radical ve dicha relación como una adaptación o ajuste en sentido funcional" (1981/1993, p. 22).

[49] Von Glasersfeld, 1981/1993, p. 31.

La concepción de la Matemática que subyace

Recodábamos más arriba una frase de Alcmeón comentada por Lakatos en su defensa del conocimiento matemático como conocimiento falible. Nicolas Balacheff, por ejemplo, prueba la compatibilidad del modelo de desarrollo piagetiano con el modelo propuesto por Lakatos para describir el desarrollo matemático[50]. La pérdida de la certeza en matemáticas ha sido argumentada de diversos modos como decíamos al comienzo de este estudio. El falibilismo del *constructivismo radical* está en consonancia con la teoría del conocimiento que acabamos de esbozar.[51]

Por su parte, Von Glasersfeld argumenta la inexistencia de dimensión ontológica en la matemática mediante una comparación entre el juego del ajedrez y las matemáticas. En el ajedrez, si se rompen las reglas del juego, el juego mismo deja también de existir. Sin embargo, en el caso de la matemática hay algo más que unas reglas al modo del ajedrez, pues los elementos a los que se aplican las reglas no son invenciones libres. Cuando realizamos la operación de contar, por ejemplo, los elementos surgen de la abstracción hecha de la experiencia ordinaria, y los conceptos abstractos básicos tales como "unicidad" o "pluralidad" tienen una vida por sí mismos antes de haber sido incorporados al reino de la matemática.

Es precisamente esta relación entre la experiencia de cada día y la práctica conceptual lo que lleva a la creencia de que las matemáticas reflejan el mundo real. Pero esta creencia así inducida, y asentada en la infalibilidad de las operaciones matemáticas (errores aparte) debida a que están regidas por reglas, no constituye una prueba de que estas operaciones dan acceso a una realidad ontológica. La certeza de los "hechos matemáticos surge de la observación de los matemáticos de estar de acuerdo en los modos de operar, no de la naturaleza de un universo objetivo".[52]

Puntos débiles de la propuesta educativa del constructivismo radical

En un estudio sobre la investigación en EM, dice Lerman: "Al jugar un papel secundario todas las formas de interacción social inclui-

---

[50] Cfr. BALACHEFF: 1991, en VON GLASERSFELD: 1991, pp. 89-110.
[51] (cfr. http://www.oikos.org/constructivism.htm, p. 6-8).
[52] VON GLASERSFELD: 1991, xvi.

do el lenguaje, subsidiarias de las lentes interpretativas de la cognición individual, el constructivismo radical conduce a un camino que va al solipsismo. En particular el papel del profesor puede ser interpretado solamente como el de quien ofrece actividades que le parecen adecuadas al estadio del desarrollo de los niños y que pueden producir algunas perturbaciones para algunos de ellos".[53]

Aparecen aquí los dos puntos débiles más significativos de esta propuesta. El constructivismo radical *como un camino que conduce al solipsismo* y el *papel del profesor* en cuanto que exige unas características difíciles de conciliar con la realidad del aula. Veamos ambas cuestiones.

En primer lugar, la acusación de solipsismo viene de la mano de la descripción de las causas que abren este camino sin retorno: el papel secundario que se otorga en la propuesta a las formas de interacción social y cultural. Este papel secundario es asignado a factores tan relevantes en educación como son los factores lingüísticos, las interacciones interpersonales, el papel del profesor, el aprendizaje del conocimiento heredado... En síntesis, no da buena cuenta de cómo reconciliar lo privado y lo público, lo individual y lo común, los aspectos psicológicos con los sociológicos y culturales del aprendizaje.

En el constructivismo radical, el principio fundamental es que el profesor/a reconozca que no está enseñando matemáticas a los alumnos, sino "enseñándoles a desarrollar su cognición"[54]. Así, "enseñar es una tarea de inferir modelos a partir de las construcciones conceptuales de los alumnos y generar a partir de ellos hipótesis para dar la oportunidad de modificar sus estructuras de modo que les conduzcan hacia acciones matemáticas que puedan ser consideradas compatibles con las expectativas y objetivos del profesor"[55].

Consideran un prerrequisito para enseñar el establecimiento de un *dominio de consenso* que incluye tanto al profesor como al alumno: "Si dos personas o incluso la sociedad entera miran a través de unas gafas distorsionadas y están de acuerdo en lo que ven, esto no hace aquello que ven más *real*, significa simplemente que sobre las bases de tal acuerdo pueden construir un consenso en ciertas áreas de sus mundos de experiencia subjetivos. Esas áreas de relativo acuerdo son llamadas "*dominios de consenso*", y uno de los más antiguos en el mundo occidental es el dominio de los números.

---

53 LERMAN: 1998, p. 347.
54 COFREY, 1990; p. 110.
55 VON GLASERSFELD: 1990, p. 34.

El concepto de *dominio consensual* es debido a Maturana (1978), y es determinante tanto para el desarrollo del aprendizaje como para la evaluación del mismo: "Un entorno de aprendizaje está creado literalmente por sus participantes, y un profesor puede usar su generalización conceptual en este contexto para guiar e interpretar la actividad matemática de los niños".[56] "Cuando el profesor cree que él y el alumno han negociado un dominio de consenso dentro del ámbito de esas experiencias, entonces puede decirse que el material ha sido enseñado".[57] Hasta lograr el dominio de consenso, las interacciones con otros tienen importancia en cuanto que producen habitualmente perturbaciones en el sujeto que aprende. Es papel del profesor el trabajar esas perturbaciones hasta llegar a reconocer el modelo con el que el alumno trata de hacerse con los conceptos y operaciones para actuar posteriormente sobre él. Estos son los modos en que el profesor pone en juego sus conocimientos a favor del aprendizaje del alumno.

La función del profesor, así concebida, posibilita a los constructivistas radicales poner de manifiesto su distancia respecto de las propuestas de educación matemática basadas en el conductismo. Una de las distinciones centrales en este sentido es la de *enseñar y entrenar,* distinción que los éxitos del conductismo no lograron eliminar. Un profesor constructivista se propone que los conceptos de los estudiantes encajen en el dominio consensual de un campo particular. No abdica de su papel de guía, sino que lo usa para animar y orientar los esfuerzos de los estudiantes por generar en ellos una comprensión conceptual autónoma. Nunca dará a sus alumnos resultados terminados y cerrados, pues se orienta a enseñar, no a entrenar. Si el profesor se propusiera entrenar buscaría que el comportamiento de sus estudiantes consistiera en repetir las respuestas al modo conductista, mientras que enseñar se orienta a generar una comprensión conceptual autónoma.

En continuidad con lo anterior y como afirmación frente a la línea conductista, el punto de vista constructivista sostiene la importancia de la *reflexión.* No hay duda de que la habilidad reflexiva es la fuente mayor de conocimiento en todos los niveles de la matemática, y que es la negación de la reflexión como fuente de conocimiento la que ha llevado a hablar de metacognición.[58]

---

[56] STEFFE: 1991, p. 192.

[57] LOKHEAD, J.: 1991, p. 75.

[58] Cfr. VON GLASERSFELD: 1991, xviii. A este respecto, un miembro destacado de esta corriente afirma: "En una epistemología donde enseñar matemáticas es

Concluimos la presentación de esta corriente, sin duda fecunda a juzgar por el gran número de adherentes y de trabajo desarrollado. Sus críticas y propuestas de superación al conductismo y la incorporación de las teorías de Piaget liberándolo en cierto sentido de su vinculación inicial al bourbakismo, han mostrado su potencialidad para sustentar otras propuestas de Educación Matemática con nuevos límites, pero diferentes de los anteriores. El constructivismo social constituye una de las tentativas de superación de de algunos de los límites señalados en el constructivismo radical, y a él dedicamos las próximas páginas.

La filosofía de la matemática y el constructivismo social en Educación Matemática

Dentro de las innumerables moradas de la casa kantiana del constructivismo, el constructivismo social tiene múltiples acepciones[59]. En el ámbito de la educación matemática, las aproximaciones sociológicas propias de la Sociología del Conocimiento Científico no han prevalecido[60], sin embargo se han producido cambios en los referentes psicológicos utilizados que han dado como resultado propuestas que comparten algunos elementos comunes bajo el nombre de *constructivismo social.* La sustitución del paradigma piagetiano por la obra de Vygotsky comporta un desplazamiento de la centralidad de las estructuras cognitivas del sujeto colocando en su lugar la influencia sociocultural del contexto.[61]

---

visto como orientada a la comunicación interactiva en un dominio de consenso de experiencia, aprender matemáticas es visto como abstracción reflexiva en el contexto de la teoría de esquemas. En esta perspectiva, el conocimiento matemático es entendido como esquemas coordinados de acción y operación" (STEFFE: 1991, p. 177).

59 Véase en el ámbito que nos ocupa la descripción de este estado de la cuestión en ERNEST, P.: 1994, el capítulo correspondiente al mismo autor "What is Social Constructivism in the Psychology of Mathematics Education". Está accesible en Internet www.wx.ac.uk/%7EPERNEST/. Ver también la acepción en el caso de las filosofías de la matemática: DE LORENZO, J.: 2000. Desde una perspectiva más general puede verse el libro de KACKING, I.: 1998.

60 Una presentación de la Sociología del Conocimiento Científico puede verse en LAMO DE ESPINOSA ET AL.: 1994. La afirmación referida a la EM puede contrastarse en LERMAN: 1996.

61 Véase SIERPINSKA & LERMAN: 1996. También P. Ernest, en el capítulo ya citado de su libro de 1994, ofrece una descripción pormenorizada de las fases, co-

El *constructivismo social* ha encontrado en las propuestas falibilistas de la matemática y en las epistemologías naturalizadas de la misma, las compañeras de camino para dar forma a las propuestas de EM sustentadas en las teorías de Vygotsky. El sujeto es un producto sociocultural e histórico, de manera que carece de sentido hablar de conocimiento individual sin que sea un conocimiento situado en contexto o en actividad. El conocimiento es cultural y se produce y controla socialmente, también el conocimiento matemático.

Como en el caso de Piaget, el conductismo imperaba cuando Vigotsky realiza su trabajo y tuvo la genialidad de insertar entre el estímulo y la respuesta la mediación de la cultura bajo la forma de significado. El sujeto que conoce es ya un individuo en acción y un sujeto social, y las actividades mentales asociadas con el sujeto activo tales como generalizar, discriminar, memoria, acción voluntaria... son productos de la comunicación entre el niño y los adultos que le rodean, son actos sociales.[62] Los significados que se remodelan y cambian en los contextos socioculturales, el niño los recibe con el lenguaje al introducirse en la cultura correspondiente.

Vygotsky critica a Piaget por intentar derivar el pensamiento lógico del niño y su completo desarrollo del puro diálogo de la consciencia, divorciando así este proceso de la actividad práctica social. También incide en este punto al criticar su resistencia a estudiar integradamente los distintos aspectos de la actividad humana, en particular cuestiona la disociación entre el afecto y la inteligencia: "Cuando nos aproximamos al problema de la interrelación entre pensamiento y lenguaje y otros aspectos de la mente, la primera cuestión que surge es la del intelecto y el afecto. Su separación como materias de estudio es una de las debilidades mayores de la psicología tradicional".[63]

Las críticas desde la tradición constructivista radical se centran en el problema de cómo es posible que si el conocimiento está en el plano social, llegue a ser algo del individuo, en qué consiste el proceso de internalización. Una respuesta a esta objeción es la de Leont'ev[64], que

---

rrientes y autores que han contribuido a desarrollar la perspectiva de constructivismo social en EM.

[62] Cfr. HARRE & GILLETT: 1994 y LURIA: 1973, p. 262.

[63] VYGOTSKY, 1986, p. 10. En esta línea, con soporte teórico en diversas teorías psicológicas y sociológicas, Inés Mª Gómez Chacón ha estudiado los afectos en el aprendizaje matemático. Véase el libro de esta autora *Matemática Emocional*, Madrid, Narcea, 2000.

[64] LEONT'EV: 1981, p. 57.

siguiendo a Vygotsky describe así el proceso de internalización: "no es la transferencia de "plano de consciencia" externo a uno interno, preexistente; es el proceso en el cual este plano se forma". En esta perspectiva es el aprendizaje quien lleva al desarrollo, contrariamente a Piaget para quien el desarrollo condiciona el aprendizaje. El aprendizaje empuja al niño hacia su futuro, más que ejercitarlo en lo que hoy es. El profesor tiene aquí un papel fundamental.

La filosofía de la matemática sustentadora del c.s. en EM

Las epistemologías de la matemática surgidas frente a las concepciones absolutistas del conocimiento matemático, se han convertido en las compañeras de camino que dan forma a las propuestas de EM sustentadas en las teorías de Vygotsky.[65]

Una propuesta significativa en EM, la del inglés P. Ernest, presenta la matemática como una construcción social, un producto cultural falible como cualquier otro tipo de conocimiento.[66] Los rasgos caracterizadores de la filosofía de la Matemática que elabora Ernest como sustentadora de la propuesta de educación matemática que sostiene parten de un posicionamiento crítico ante las así llamadas filosofías absolutistas de la matemática, entendiendo por tales las filosofías ligadas a los programas de fundamentación –logicista, formalista e intuicionista– y las posiciones platonistas. Todas reconocen en la matemática un cuerpo de conocimiento cierto. En contraste con ellas están las llamadas por él, siguiendo a Confrey (1981), *filosofías del cambio conceptual*, que sostienen que el conocimiento matemático es falible, corregible y en última instancia un producto social cambiante. La obra de Lakatos constituye el punto de inflexión como ya dijimos en la primera parte de este estudio. Reconoce que todo conocimiento está culturalmente condicionado y está cargado de valores, interconectado y basado en la actividad humana. Tanto el origen como la justificación tienen carácter social, y se logran por consenso, jugando el lenguaje un papel especialmente relevante.

En opinión de Paul Ernest (1994) la problemática del constructivismo social para la EM tiene dos vertientes. Una es cómo dar cuenta del aprendizaje del individuo sobre las bases de una construcción

[65] En el estudio tantas veces citado de SIERPINSKA & LERMAN: 1996 puede verse una amplia descripción de estas epistemologías falibilistas y naturalizadas. También en DE LORENZO, J.: 2000.

[66] Véase el artículo en este volumen del profesor Jesús Alcolea.

social; la otra, cómo dar cuenta de la naturaleza del conocimiento matemático en tanto que socialmente construido.

Para la primera encuentra cauce en las bases psicológicas proporcionadas por Vigotsky y sus seguidores.[67] Para la segunda ofrece este autor una respuesta elaborada a partir de varias corrientes de la filosofía de la matemática contemporánea. Cuatro cuestiones articuladas dan forma a su propuesta: un *origen* sociocultural, una *justificación* de las demostraciones *quasi-empírico* al modo lakatosiano, una caracterización de "lo *objetivo*" como lo "socialmente aceptable" mediado por las instituciones[68], y el *lenguaje* como mediación entre la construcción individual y el carácter sociocultural del conocimiento, adoptando un tipo de convencionalismo al modo del Wittgenstein de las *Investigaciones Filosóficas* (1956) en el que las reglas son parte de los *juegos de lenguaje* que remiten a *formas de vida.*

En sus últimos escritos, Ernest da un paso más y matiza algunas posiciones del convencionalismo como la de sustentar la verdad matemática en las reglas del lenguaje. Lo hace adhiriéndose a un cierto pragmatismo, en particular el representado por Richard Rorty. Con él adopta la conversación –siendo ésta "fundamentalmente una forma moral"– como base epistemológica para una filosofía constructivista social de la matemática.[69]

Las verdades de la matemática son definidas por un acuerdo social implícito – patrones de comportamiento compartido– sobre lo que constituyen conceptos matemáticos aceptables, relaciones entre ellos y métodos para derivar nuevas verdades a partir de otras anteriores. De este modo, según Paul Ernest, la certeza matemática descansa en reglas del discurso socialmente aceptadas incorporadas a nuestras *formas de vida.* Hace suyo el argumento de Rorty de que nuestra certeza en el teorema de Pitágoras es nuestra confianza en que nadie va a encontrar un contraejemplo al teorema y, por tanto,

---

[67] En etapas anteriores de su producción, Ernest estuvo adscrito al constructivismo radical. Él mismo expresa así su paso a las teorías de Vygotsky como referente epistemológico consistente con sus posiciones en epistemología matemática: "Aunque ofrecí una crítica del constuctivismo radical (por ejemplo, ERNEST :1991), es sólo gradualmente como he llegado a la comprobación de cuán incompatible es la posición neopiagetiana del c.r. con el punto de vista de la inteligencia que se abre paso a través de la metáfora de la conversación" (ERNEST: 2004, p.82).

[68] Cfr. BLOOR, D.: 1983.

[69] Cfr. ERNEST, 2004, pp. 91 y 83 respectivamente.

"nuestra certeza será mas bien un tema de conversación entre personas que una interacción con la realidad no humana".[70]

Las críticas que pueden hacerse son las que corresponden por una parte a las posibles críticas a las filosofías de la matemática que toma de base y por otra a la consistencia de la conjugación de las mismas. Él mismo reconoce que Vygotsky no es ninguna panacea y coincide con otros autores[71] en afirmar que la teorización de los aspectos cognitivos del aprendizaje matemático con base en Piaget están más desarrollados que los correspondientes apoyados en Vygotsky. Sin embargo, esta segunda vía tiene a su favor que abre un conjunto de líneas de avance prometedoras en investigación como son la línea semiótica, la relevancia de la retórica en las aulas de matemáticas para el lenguaje escrito y hablado, el papel crucial del profesor como corrector del aprendizaje y no como mero catalizador, la importancia de la clase vista como contexto social, etc.

Reflexiones finales

Dos son las cuestiones que al final de este trabajo emergen con forma propia. La primera se refiere a que la EM es la arena en la que se encuentra la matemática con un conjunto importante de ciencias humanas y con la propia filosofía, y ese encuentro no se realiza en abstracto, sino que tiene su lugar de verificación en un espacio institucionalizado: el aula y la escuela, con la mediación de un profesor que sostiene unas creencias. La segunda, más central para la perspectiva que aquí hemos adoptado, es la relevancia o no de la elección de epistemologías de la matemática realistas o constructivistas para sustentar las propuestas didácticas que los profesores adoptan en el aula.

La primera de las cuestiones pone de manifiesto la tensión de la EM entre los saberes propios de las ciencias humanas y en especial de la psicología, y la epistemología matemática. Incluso ante un acuerdo sobre contenidos matemáticos que los niños y jóvenes deberán conocer, la tensión necesita para ser resuelta grandes dosis de lucidez en los profesores y diálogo abierto entre quienes inciden en la formación de un mismo niño o joven en su trayectoria escolar para no someterle a procesos de matrices contrapuestas.

---

[70] RORTY: 1979, pp. 156-157. Una crítica a la epistemología matemática de Rorty puede verse en mi artículo "Pensar la matemática en la posmodernidad" (CAÑÓN: 2004).

[71] Cfr. LERMAN: 1996.

También tras esta primera cuestión se esconden cuestiones de poder entre quienes reclaman para los matemáticos la autoridad para decidir cómo debe ser enseñada su disciplina y quienes se la atribuyen a los teóricos de las ciencias humanas. En ambos casos, el profesor se queda con la responsabilidad de formarse para conociendo ambos extremos elegir la propuesta didáctica que a su juicio contribuya a un mejor aprendizaje.

En relación a la segunda de las cuestiones mencionadas, hemos podido ver cómo en las presentaciones que hemos hecho se ponen de manifiesto posiciones epistemológicas marcadamente diferentes, que con muchos matices obedecen al predominio de grandes tradiciones filosóficas: el realismo griego y el constructivismo kantiano.

¿Por qué ese vuelco de las concepciones griegas de la Matemática a las propias de la modernidad? Cuando Kant se refiere a las diferencias entre el quehacer filosófico y el matemático afirma con nitidez: el primero procede por análisis, el otro por construcción de conceptos. Y es en esta última tarea en la que la razón vuela sin rozamiento alguno. La matemática no precisa de la realidad externa para gestarse, la paloma kantiana no encuentra rozamiento alguno en su vuelo libre.

Y esto hasta el punto de considerar, en frase de Piaget, que el realismo griego tenía que ver con su todavía estado de infancia en lo que a autorreflexión se refiere, a su distancia de Descartes. Creían que la matemática tenía que ver con las cosas, porque todavía no habían generado ese modo de considerar el conocimiento como lo que corresponde a lo producido por la mente humana. Estaban, por decirlo así, en un estadio de desarrollo cognitivo todavía incompleto, que les llevaba a creer que las formas ideales que reconocían como figuras geométricas por ejemplo, no habían sido producidas por ellos mismos, sino que tenían que ver con las cosas externas. Esto explica, en su opinión, que "las matemáticas griegas nacieran esencialmente realistas o, como ha dicho algún autor, "contemplativas".[72]

Para el constructivismo moderno y el radical de Von Glasersfeld que hemos presentado la matemática pasa a ser el juego de la mente consigo misma, que se da cuando esta se cierra a toda realidad y únicamente se "siente" a sí misma, pues sólo puede conocer lo que ha producido y de algún modo retiene dentro de sí.[73]

---

72 Cfr. Piaget: 1970, p. 27.
73 Cfr. Arendt: 1958, p. 310.

Por su parte, las teorías de Vygotsky en psicología y las corrientes de sociología del conocimiento empujan activamente la tercera vía de la construcción social y cultural. No es ya el sujeto trascendental de esquemas universales y necesarios, ni siquiera su manifestación naturalizada del sujeto epistemológico piagetiano quien hace matemáticas, sino un sujeto fragmentado y falible que se constituye en interacción con la cultura y con el entorno social, un sujeto que deviene tal en la medida en que desarrolla un juego de lenguaje determinado al participar en las actividades y relaciones de una forma de vida concreta generada en torno al quehacer matemático, a su enseñanza y a los procesos de aprendizaje generados para ello.

Se plantea aquí una cuestión que no tiene respuesta única: la interpretación griega de la matemática y del quehacer matemático, ¿es sólo un estadio en el desarrollo evolutivo de los modos de conocer? Dicho de otra manera, ¿hay que considerar que el planteamiento de la epistemología cartesiana, y en particular del constructivismo kantiano, supone un estadio más avanzado que el griego, y que por tanto cualquier interpretación realista de la Matemática –no sólo la platonista– corresponde a un estadio evolutivo ya superado? Quienes sostienen implícita o explícitamente una respuesta afirmativa a estas cuestiones, sostienen alguna forma de constructivismo, quienes sostienen una respuesta negativa, mantienen algún tipo de realismo, es decir, consideran que el conocimiento matemático tiene que ver con una realidad externa al sujeto –aunque no sólo– y encuentran en el conocimiento matemático un medio para la relación con la naturaleza, de la cual procede en interacción con esa otra parte singular de la realidad que es la mente humana. Es decir, los realistas de hoy no ignoran las aportaciones que la modernidad ha hecho a la aportación del sujeto en la elaboración del conocimiento, pero no quedan encerrados en ellas.

¿De qué modo marcan el aprendizaje de la matemática las diversas posiciones epistemológicas de los didactas y de los profesores? Las propuestas didácticas que hemos presentado, muestran no sólo la vigencia de los constructivismos, sino también la de dos modalidades de realismo: el explícito de Freudenthal y el de la Didactique en sus *situaciones didácticas*.

Estamos ante escenarios muy distintos y la obra didáctica que puede ser representada en cada uno de ellos es al menos inicialmente, diferente en muchos aspectos. Quedan abiertas cuestiones importantes referidas a la formación matemática de las futuras generaciones: ¿Tienen todos los escenarios la potencialidad que se requiere para formar niños y jóvenes matemáticos en grado de excelencia? O para quienes compartan la tesis de Thomas Hardy: "el matemático nace, no se hace", ¿cualquier camino iniciado despertará la genialidad latente? ¿Cualquiera de los escenarios puede desarrollar adecuadamente las capacidades matemáticas de los que no nacieron genios? ¿Hay algún escenario que privilegie alguno de estos cometidos?

Bibliografía

ARENDT, H.:1958, *The Human Condition,* The University of Chicago Press. Hay traducción española de R. Gil Novales: *La Condición Humana,* Paidós, Barcelona, 1993.

ARSAC, G.: 1992, "The Evolution of a theory in Didactics: The Example of Didactic Transposition", en DOUADY, R. AND MERCIER, A. (eds) *Research in Didactique of Mathematics. Selected Papers,* La Pensée Sauvage editions, Grenoble.

ARTIGUE, M. : 1991,"Epistemology et Didactique" en *Recherches en Didactique des Mathèmatiques.* 10 (2-3), 241-286

ARTIGUE, M. and al..(edts):1994, *Vingt Ans de Didactique des Mathematiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gèrard Vergnaud,* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

AUSUBEL, D.P.: 1968, Educational Psychology: A cognitive Viw, Holt, Rinehart and Winston. NY.

BALACHEFF, N. :1990, "Towards a Problèmatique for Research on Mathematics Teaching"en *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (4), 258-72

BALACHEFF, N. :1991, "Treatmnt of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematicas Learning", en von Glasersfeld, 1991; 89-110

BISHOP et al. (edts) :1996, *International Handbook of Mathematical Education,* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

BLOOR, D.: 1983, *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge,* Macmillan, London

BOSCH, M., GASCON, J.: 2004, "La praxéologie comme unite d'analyse des processus didactiques", en Mercier,A. (ed) *Balises pour la Didactique. Actes de la 12 École d'Eté de Didactique des Mathematiques,* La Pensée Sauvage, Grenoble, BOSCH, CHEVALLARD,Y. y GASCON: 2005, "Sience or Magic? The use of Models and Theories in Didactcs of Mathematics. Paper proposed to Working Group 11: Different theoretical perspectives/approaches in research in mathematics education", CERME-4, February 2005.

BOURBAKI, N.: 1962, "Lárchitecture Des Mathematiques", en *Les Grands Courants de la Pensée Mathematique*, F. le LIONAIS (edt.), Blanchard, Paris.

BROUSSEAU, G.:1986, "Fondements et Methodes de la Didactique des Mathèmatiques" en *Recherches en Didactique des Mathèmatiques* 7 (2),33-115

BROUSSEAU, G.:1994,*Problèmes et Résultats de Didactique des MAthématiques*, ICMI Study .

BROUSSEAU, G.:1998, Théorie des Situations didactiques. Paris: Pensée Sauvage.

CAÑON, C.: 1993, *La Matemática: Creación y Descubrimiento*, UPCO, Madrid

CAÑON, C.: 1996 , "La Relevancia de la Epistemología para la Didáctica de las Matemáticas", en RUIZ HIGUERAS, L. (edt) 1996

CAÑON, C.: 2000,"¿Qué es la Matemática?" en CARRILLO, J. Y CONTRERAS, L.C. edts.:2000,13-42.

CAÑON, C.: 2004, "Pensar la Matemática en la Posmodernidad", en *UNO*, 37, pp.32-47.

CAÑON, C.: 2004, "Aproximación a la Epistemología Matemática de Miguel de Guzmán", en ACTAS del IV Congreso de la SLMFCE, Universidad de Valladolid,.

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C. edts.: 2000, *Matemática Española en los Albores del Siglo XXI*, Hergué Ed. Huelva.

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C. edts.: 2000, *Resolución de Problemas en los Albores del Siglo XXI*, Hergué Ed. Huelva.

CHEVALLARD, Y.: 1985 /1991, *La Transposition Didactique du savoir Savant au Savoir Enseigné*, La Pensèe Sauvage Editions, Grenoble.

CHEVALLARD: 1992, "Concepts Fondamentaux de la Didactique : Perspectivas aportées par une Approche Antropologique", en *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1) 73

CONFREY, J. : 1990,"What Constructivism Implies for Teaching", en DAVIS, R.B., MAHER, C.A. and NODDINGS N: (ed) *Constructivist Viewa on the Teaching and Learning of Mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Nº.4, 107-122

DE LORENZO, J.: 2000, *Filosofías de la Matemática Fin de Siglo*, Universidad de Valladolid.

DOUADY, R.: 1986, "Jeux des cadres et Dialectique outil-objet". *Recherches en Didactique des Mathêmatiques*, 7 (2), 349-382.

DUVAL, R.: 1995, *Sémiosis et Pensé Humaine.* Berna, Meter Lang.

ECHEVARRÍA, J.:1995, *Filosofía de la Ciencia*, Akal, Madrid.

ERNEST, P.:1991, *The Philosophy of Mathematics Education*, London, Falmer Press

ERNEST, P:1998, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, NY, SUNY Press.

ERNEST, P. 2004 "¿Son las Matemáticas descubiertas o inventadas?", en *UNO*, 37, pp.25-31.

FREGE, G.:1984, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,* trad. Española de U. Moulines, *Fundamentos de la Aritmética,* Edit. Laia, Barcelona, 1972.

FREUDENTHAL, H.:1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Kluwer AcademicPublishers, Dordrech.

FREUDENTHAL, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech.

GASCON, J.: 1998, "Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathêmatiques*, 18 (1) 7-34

GODINO, J.D.: 2005, Perspectiva De la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. Documento de Trabajo: http://www.ugr.es/local/jgodino/

GÓMEZ CHACÓN, I.Mª.:2000, *Matemática Emocional*, Narcea, Madrid.

GÓMEZ CHACÓN, I.Mª (edt):2005, *El Legado Científico, Acadêmico y Educativo de Miguel de Guzmân*, Universidad Internacional Menéndez Pelayo, Santander.

HACKING, I : 1998, *The Social Construction of what?* Harvard University Press, Cambridge. Traducción española de J. Sánchez Navarro: 2001, *¿La Construcción Social de qué?* Barcelona, Paidós

HARRÉ, R.& GILLETT, G: 1994,The Discursive Mind, Sage, London.

KITCHER, Ph.: 1983, *The NAture of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press.

LAKATOS, I.:1976, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press. Trad. C. Solís, *Pruebas y Refutaciones*. Alianza Ed. Madrid, 1978.

LAMO DE ESPINOSA, E., GONZÁLEZ GARCÍA, J.M. y TORRES ALBERO, C.:1994 *La Sociología del Conocimiento y de la Ciencia*. Alianza, Madrid.

LEONT'EV,A.N.:1981," The Problem of ctivity in Psychology", en Wetsch, J.V. (ed.),*The Concept of Activity in Soviet Psychology*,Sharpe, Armonk, New York.

LERMAN, S.: 1998,"Research on Socio-Cultural Perspectivas of Mathematics Teaching and Learning, en SIERPINSKA,a. and KILPATRICK,J.: 1998,PP. 333-350.

LOCHHEAD, J.:1991, "Making Math Mean", en von Glasersfeld 1991, 75-88.

LURIA, A.R.:1973, The Working Brain, Penguin, Harmondsword.

MARTÍNEZ ANSEMIL, J.Mª. :2005,*Matemáticas, Investigación y Educación. Un Homenaje a Miguel de Guzmán*. Anaya, Madrid.

MATURANA, H.R.:1978,"Biology of Language: The Epistemology of Reality", en MILLER, G. and LENNENBERG, E.(edts),*Psychology and Biology of Language and Thought: Essays in Honour of Eric Lannenbers,* Academic Press, New York, 27-63. PIAGET, J.(en colaboración con A. SZEMINSKA): 1941, *La Genèse du nombre chez l'enfant,* Delachaux&Niestlé. Traducción española: *La Génesis del número en el niño,* Guadalupe, Buenos Aires.1967.

PIAGET, J.: 1970, *Naturaleza y Métodos en Epistemología,* Ed. Proteo, Buenos Aires.

PIAGET, J.: 1971, *Le Structuralism,* P.U.F. París.

PIAGET, J.y otros: 1978, *La Enseñanza de las Matemáticas Modernas,* Alianza Ed., Madrid.

PIAGET, J. y GARCÍA, R: 1989, *Psychogenesis and the History of Science,* Columbia University Press, New York.

POLYA, G.:1945, *How to solve it.* Princeton Univ. Press.

PUIG, L.: 1997,"Análisis Fenomenologico", en RICO, L. (coord.) pp.61-94.

RICO, L. SIERRA, M. "Didáctica de la Matematica e Investigación", en CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C. edts. (2000), pp. 77-132.

RICO, L. (coord):1997, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* Horsori/ICE, Barcelona

RORTY, R.:1979, *The Philosophy and the Mirror of Nature,* Princeton University Press, Traducción española de Jesús Fernández

Zulaica: *La Filosofía y el Espejo de la Naturaleza*, 2001, Cátedra, Madrid.

RUIZ, A., CHAVARRIA y ALPIZAR, M.: 2005, "Epstemología y Construcción de una nueva Disciplina Científica: La Didactique des Mathématiques" en RUIZ, A. (ed) *Educación Matemática en Costa Rica. Balance y Perspectivas para un Nuevo, Milenio.Universidad de Puerto Rico*. CD-Universidad de Puerto Rico.

RUIZ HIGUERAS, L.(ed): 1996, *El Saber en el Espacio Didáctico*. Universidad de Jaén.

RUIZ HIGUERAS, L.: 1998, *La Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico*. Univ. de Jaén

SIERPINSKA, A and LERMAN, S.1996: "Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education" en BISHOP et al.(edts) 1996.pp. 827-876

SIERPINSKA, A. and KILPATRICK, J.(1998) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer AcademicPublishers, Dordrech.

SIERPINSKA, A: 2003, "Research in Mathematics Education Through a Keyhole" en CMESG/GCEDM *Poceedings* 2003, pp. 11-35,

STEFFE, L.P.: 1991, "The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications, Von Glasersfeld, E. (ed), 1991,177-194.

Van HEIJERNOOT, J.: 1967, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge.

VERGNAUD, G.: 1995, "La Théorie des Champú Conceptuels". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2, 3), 133-170.

Von GLASERSFELD, E.: 1981,"*Introducción al constructivismo Radical"* en Watzlawick, P. y otros,1993: *La Realidad Inventada*, Gedisa, Barcelona, La versión original es de 1981, *en Die Erfundene Wirklichkeit*. Munich: Piper. Hay versión inglesa del autor en 1984*: The Invented Reality*, Norton, N.Y.

Von GLASERSFELD, E. (ed): 1991, *Radical Constructivism in Mathematics Education,* Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Von GLASERSFELD, E.: 1995, A Constructivist Approach to Teaching", en STIFFE, L.P. and GALE, J. (edts), *Constructivism in Education,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.

Von GLASERSFELD, E.: 2003,Review on LESH, R.& DOERR, H.M. (eds) "*Beyond Constructivism, Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching,* Lawrencw Erlbaum Associates, en ZDM 2003 vol 35 (6) 325-329.

VYGOTSKY, L.: 1978, *Mind in Society*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
WITTGENSTEIN, L.: 1956, *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford.

Enero 2006

Camino Cañón Loyes
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Universidad Pontificia Comillas (Madrid)